



آ.ای. اوستروسکی
ا.ب. دینکین
س.آ. مالچانوف
آ.ل. روزنتال
آ.ک. تولپیکو

مسأله‌های ریاضی: آسان، ولی...

ترجمه پرویز شهریاری

دهها سال است که آموزش ریاضی در برنامه‌های درسی، جای نمایانی را گرفته است. و این کاملاً طبیعی است، زیرا علاوه بر آنکه نظریه‌های ریاضی، عامل اساسی پیشرفت دانش و صنعت در زمان ماست، روشهایی که در ریاضیات به کار می‌رود، می‌تواند در سایر زمینه‌های تفکر انسانی، نمونه قرار گیرد و آدمی را از کج اندیشی دور کند. ولی آیا آنچه که در برنامه‌های درسی، به آموزش ریاضی اختصاص داده شده است، برای این منظور کافی است؟ اگر از نارساییهای برنامه و کتاب و معلم بگذریم و اگر وجود کتابهای سطحی و ویران‌کننده «حل المسائل» را ندیده بگیریم و فرض را بر این بگذاریم که همه اینها در مرز بالای درستی و دقت و شایستگی باشد، باز هم به سادگی می‌توان احساس کرد که آموزش مدرسه‌ای نمی‌تواند جوابگوی نیازهای امروزی باشد، زیرا اولاً آموزش مدرسه‌ای تنگ و محدود است: برنامه و کتاب و معلم، باید با ساعتهای محدود درس کلاسی تطبیق کند و

فرصت تفکر و کاوش را از همه می گیرد . ساعتهای محدودی هم که در هفته به درس ریاضی مربوط می شود ، باید صرف بازرسی شاگردان ، گفت و شنود در زمینه های بی معنی مربوط به مطالب غیر ریاضی و احياناً يك «سخنرانی» کوتاه معلم در باره درس تازه بشود . تعداد زیاد شاگردان و نبودن محیط مناسب کار ، امکان هر گونه تفکر سالم را در کلاس ، از شاگرد و معلم می گیرد و کار آنها را تبدیل به نوعی «کار تشریفاتی» می کند . این وضع نتیجه طبیعی کار مدرسه ای است و تنها با تلاش فراوان ، ممکن است بتوان تا حدی آنها را تعدیل کرد . ثانیاً آموزش مدرسه ای هدفی غیر علمی را دنبال می کند : وجود نمره و امتحان و بالاخره مدرک تحصیلی و «مزایای قانونی» آن ، به طور طبیعی آموزش مدرسه ای را از کار سالم و عمیق دور می کند و آنها را به صورت مرکزی درمی آورد ، که همه برای رسیدن به دیپلم و لیسانس و غیر آن ، با هم مسابقه می دهند . خود این صورت امتحان و نمره دادن و بازرسی کارهای شبانه دانش آموز و دانشجو هم داستان شگفتی است که نمی دانم چگونه می خواهند به کمک آنها استعدادها را بشناسند و شور و شوق علاقه مندان را زیاد کنند . در همه جای دنیا ثابت شده است که این شیوه ارزشیابی نادرست است و هرگز نمی تواند معیاری برای

شناسایی استعدادها و یا وسیله‌ای برای پیشرفت اندیشه جوانان باشد. ثالثاً حرفه معلمی، به صورتی که وجود دارد، خود نابود کننده استعدادها است. تجربه نشان داده است که قریب به اتفاق معلمان، با شروع کار خود، دست از مطالعه و تحقیق برمی دارند و چون خود را از «رقبای» خود در حرفه‌های دیگر، از نظر مالی و حیثیت اجتماعی، «عقب‌تر» می‌بینند، می‌کوشند تا با «تدریس» زیادتر، «عقب‌ماندگی» خود را جبران کنند. اینها بعد از مدتی، به صورت آدم‌هایی در می‌آیند که به طور طبیعی از خصلت‌های يك مربی (به مفهومی که تعریف می‌کنند) دور شده‌اند. اینها «روضه‌خوانهایی» می‌شوند که به خاطر کار زیاد و به خاطر تکرار یکنواخت مطالب در سالهای متوالی، قدرت خلاقه ذهنی را به تدریج از دست می‌دهند و جز در چهارچوب «درس تخصصی» خود، آن‌هم تنها برروالی که بارها تکرار کرده‌اند، از تفکر در زمینه‌های دیگر، باز می‌مانند. تنها آن‌ها که به این درد واقفند و دائماً با آن می‌جنگند، می‌توانند آن‌هم تا حدی، در تسکین آن موفق شوند. این گناه معلم نیست، بلکه نتیجه حرفه معلمی به شیوه امروزی آن است. من خود معلم و به این بلیه گرفتار.

چه باید کرد؟ آیا، این به معنای آن است که باید آموزش مدرسه‌ای را رها کرد؟ من نمی‌دانم! این

چیزی است که باید آنهایی که صلاحیت این بحث را دارند ، به آن پردازند . ولی راههایی وجود دارد که می تواند تا حدی این نارساییها را برطرف کند که یکی از آنها ، وجود کتابهای غیر درسی است . اگر این کتابها درست انتخاب شود و اگر به خوبی در دسترس جوانان ما باشد ، می تواند ذوقها و استعدادها را به طرف خود جلب کند و با پیدا کردن نیروی ذهنی نهفته آنها ، در کار بارور کردن اندیشه هایشان ، مؤثر افتد .

* * *

ریاضیات دو جهت به ظاهر متفاوت دارد : از یکطرف بیش از حد انتزاعی است و رابطه ها و نظریه های آن ، تنها در ارتباط با هم ، شناخته می شود ؛ ولی از طرف دیگر پیشاهنگ همۀ دانشها است و همه آنها ، و به طبع آنها ، صنعت و زندگی امروزی ، وابسته به ریاضیات است .

ناچیز گرفتن هر کدام از این دو طرف ، زیانهای جبران ناپذیری به بار می آورد . کسی که می خواهد با ریاضیات کار کند ، باید هم به نیروی درونی آن (رابطه ها ، قضیه ها ، نظریه ها و به خصوص روشهای استدلال) توجه کند و هم به نیروی بیرونی آن (کاربرد آن در دیگر دانشها و در صنعت ، رابطه عمیق و جدی آن با عمل و زندگی روزانه ، پیوستگی تاریخی آن و

بالاخره ، رابطه‌ای که با نیازهای زمان دارد).

مطالعه تاریخ ریاضیات (قصدم تاریخ ریاضیات

است نه زندگینامه ریاضی‌دانان - اگرچه آن‌هم به جای

خود بی‌فایده نیست)، تطبیق مسأله‌های نظری ریاضی با

عمل و زندگی روزانه ، جستجوی راه‌حلهای متفاوت

و نا آشنا برای مسأله‌های ریاضی ، توجه به سرگرمیها و

معماهایی که از دنیای دور بر ما فراهم شده‌اند و...

می‌تواند به هدف بارور کردن اندیشه ریاضی و شکفتگی

استعدادهای کمک کند . و ترجمه این کتاب هم قدمی

است که در این راه برداشته می‌شود .

مسأله‌های این کتاب ، از دو کتاب «مسأله‌های

ریاضی» تألیف ا. ب. دینکین ، س. آ. مالچانوف ،

آ. ل. روزنتال و آ. ک. تولپیکو (۱۷۰ مسأله اول)

و «۷۵ مسأله از ریاضیات مقدماتی، آسان ولی...» تألیف

آ. کساندرایسا آکویچ اوستروسکی (از مسأله ۱۷۰ تا مسأله

۲۴۲)، برداشته شده است و جز در بعضی موارد به ندرت ،

که راه‌حلهایی از طرف مترجم داده شده و یا راه‌حلهای کتاب

اصلی مختصری تفاوت پیدا کرده است ، همه جا نوع

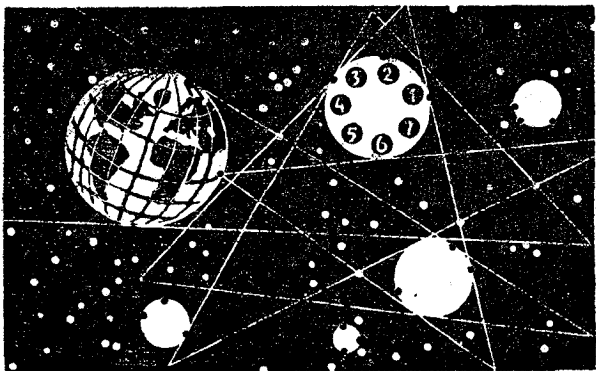
استدلال و روش کار مؤلفین رعایت شده است .

تمام صورت مسأله‌ها در ابتدای کتاب (از صفحه

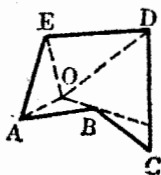
۹ تا ۷۰) آمده است و سپس حل آنها در آخر کتاب

(از صفحه ۷۱ تا صفحه ۲۴۷) ، اضافه شده است .

مترجم



۱. از نقطه O واقع در داخل چند ضلعی $ABCDE$ تمامی ضلعهای AB ، DE و EA و فقط قسمتی از ضلع CD دیده می شود (شکل ۱).



شکل ۱

يك چند ضلعی رسم كنید كه از نقطه O واقع در داخل آن ، هیچيك از ضلعها بطور كامل دیده نشود . يك چند ضلعی رسم كنید كه از نقطه O واقع در خارج آن ، هیچيك از ضلعها بطور كامل دیده نشود .

۲. (a) شما می خواهيد شماره تلفن دوستان را بدانيد . دوست شما در برابر پرسشهای شما تنها «بله» یا «نه» می گوید . اگر شماره تلفن دوست شما پنج رقمی باشد ، كمترین تعداد پرسشهای شما چقدر است ؟

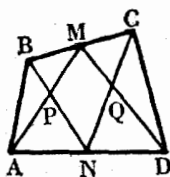
(b) حالا فرض كنید كه دوست شما شرط کرده باشد كه بتواند به یکی از پرسشها جواب نادرست بدهد ؛ در این صورت كمترین تعداد پرسشهای شما چقدر است ؟

۳. فاصله بین دو دهكده A و B مساوی ۳ كيلومتر است . ۱۰۰ دانش آموز در دهكده A و ۵۰ دانش آموز در دهكده B وجود دارد . در چه فاصله ای از دهكده A يك دبستان ساخته شود تا مجموع راهی كه ۱۵۰ دانش آموز روی هم می پیمایند كمترین مقدار ممكن باشد ؟

۴. (a) با استفاده از يك پرگار ، رأسهای مربع محاط در يك دایره مفروض را معین كنید (مركز دایره معلوم است .)

(b) دایره به قطر AB و نقطه M واقع در خارج آن مفروض است . تنها با استفاده از يك خط كش ، می خواهیم از نقطه M عمودی بر AB یا امتداد آن رسم كنیم .

۵. مسافری به يك مهمانخانه وارد شد. او پول نداشت ولی يك زنجير نقره‌ای در اختيار داشت که شامل ۶ حلقه بود و به مدیر مهمانخانه پیشنهاد کرد که برای هر روز اقامت خود یکی از حلقه‌های زنجير را به او بدهد. مدیر مهمانخانه پیشنهاد او را به این شرط قبول می‌کند که اولاً هر روز یکی از حلقه‌های زنجير را از او بگیرد، ثانیاً زنجير تنها از يك نقطه پاره شود.
- مسافر کدام حلقه را پاره کرد و چگونه پرداخت روزانه خود را انجام داد؟



شکل ۲

۶. M و N را وسط ضلعهای روبرو در چهارضلعی $ABCD$ فرض کنید (شکل ۲). ثابت کنید مساحت چهارضلعی $MQNP$ برابر است با مجموع مساحتهای دو مثلث APB و CDQ .

۷. هر يك از دو ضلع روبرو را در يك چهارضلعی محدب به پنج قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. خطهای راستی که نقطه‌های متناظر دو ضلع را به هم وصل می‌کنند، چهارضلعی مفروض را به پنج چهارضلعی متوالی تقسیم می‌کنند. ثابت کنید مساحت چهارضلعی وسط يك پنجم مساحت چهارضلعی مفروض است.
۸. از رأس A در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، خطی رسم کنید که چهارضلعی را به دو شکل هم‌ارز (با مساحت‌های مساوی) تقسیم کند.

۹. دنبالهٔ مسألهٔ ۵: اگر مسافر ۱۰۰ روز در مهمانخانه بماند و زنجیری با ۱۰۰ حلقه در اختيار داشته باشد، برای اینکه هر روز يك حلقه به مدیر مهمانخانه بدهد، زنجير را لااقل از چند نقطه باید پاره کند؟ جواب را در حالت کلی (یعنی برای n روز با

يك زنجير n حلقه‌ای) هم پیدا کنید .

۱۰. عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار در ساعت ۱۲ کاملاً بر هم منطبق اند . بعد از چه مدتی که از ساعت ۱۲ بگذرد ، این دو عقربه دوباره روی هم قرار می‌گیرند ؟

۱۱. در يك فنجان ۵ قاشق چای و در فنجان دیگر ۵ قاشق شیر وجود دارد . يك قاشق شیر از فنجان دوم بر می‌داریم و در فنجان اول می‌ریزیم ؛ سپس آنرا با دقت به هم می‌زنیم و يك قاشق چای مخلوط با شیر به فنجان دوم بر می‌گردانیم . کدام بیشتر خواهد بود : مقدار چایی که در فنجان شیر است یا مقدار شیری که در فنجان چای است ؟

اگر این عمل را ۱۰ بار متوالی انجام دهیم ، جواب چه تفاوتی می‌کند ؟

اگر عمل به هم زدن را بادقت انجام ندهیم چه وضعی پیش می‌آید ؟
اگر مقدار چای در فنجان اول کمی بیشتر از مقدار شیر در فنجان دوم باشد ، جواب مسأله چگونه است ؟

۱۲. ته لامپی هفت شاخ دارد که روی محیط يك دایره و به فاصله‌های مساوی از یکدیگر قرار گرفته اند . پریز هم دارای هفت سوراخ است که به فاصله‌های مساوی از یکدیگر روی محیط دایره‌ای واقع اند . می‌خواهیم شاخهای لامپ و سوراخهای پریز را به ترتیب با عددهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ و ۷ طوری نامگذاری کنیم که به هر ترتیبی لامپ را به پریز وصل کنیم ، تنها یکی از شماره - های شاخهای لامپ داخل شماره هم نام خود در پریز بشود .

۱۳. در کسر اعشاری

$0/12345678910111213141516171819202122...$

همه عددهای طبیعی پشت سر هم نوشته شده است . ثابت کنید که

این کسر غیر متناوب است .

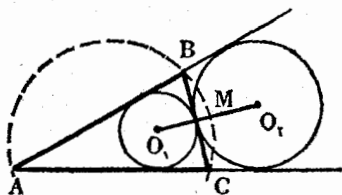
۱۴. هواپیما از عشق آباد روی کوتاهترین مسیر به طرف سانفرانسیسکو پرواز می کند . مختصات جغرافیایی این دو شهر چنین است :
عشق آباد $\approx 58^\circ$ درجه طول شرقی ، 38° درجه عرض شمالی .
سان فرانسیسکو $\approx 122^\circ$ درجه طول غربی ، 38° درجه عرض شمالی .

وقتی که هواپیما از فرودگاه عشق آباد حرکت می کند ، در چه جهتی پرواز می کند (به طرف جنوب ، یا جنوب غربی یا غرب و غیره ؟)

۱۵. ثابت کنید که حاصلضرب رقمهای يك عدد چند رقمی کوچکتر از خود عدد است .

۱۶. پنج تکه کاغذ داریم . بعضی از آنها را به پنج قسمت کرده ایم ، بعضی از تکه های بدست آمده را دوباره به پنج قسمت کرده ایم و غیره . این عمل را چند مرتبه تکرار کرده ایم و سپس تکه کاغذ های بدست آمده را شمرده ایم : ثابت کنید که نمی توان از این راه 1352 تکه بدست آورد .

۱۷. در يك مثلث غیر مشخص دایره محاط داخلی و یکی از دایره های محاط خارجی را رسم کرده ایم . ثابت کنید پاره خطی که مرکزهای این دو دایره را به هم وصل می کند



شکل ۳

به وسیله دایره محیطی مثلث نصف می شود (شکل ۳) .

۱۸. a دو توده سنگریزه داریم . دو نفر قرار می گذارند که به نوبت هر کدام هرچند سنگریزه که مایل باشند تنها از یکی از توده ها

بردارند . کسی برنده است که آخرین سنگریزه را بردارد . اگر شما بخواهید حتماً برنده باشید ، طرح بازی را چگونه می ریزید ؟
(b) اگر سه توده سنگریزه داشته باشیم و تعداد سنگریزه ها در هر سه توده یکی باشد . شما که بازی را با همان شرطهای قبل شروع می کنید ، به چه ترتیب حتماً برنده خواهید شد ؟

۱۹. (a) روی يك كاغذ شطرنجی يك چند ضلعی رسم کرده ایم (محدب بودن آن لازم نیست) ، به نحوی که ضلعهای آن روی خطهای كاغذ قرار گرفته باشد . ثابت کنید مرکز ثقل این چند ضلعی را می توان به كمك خط كش بدست آورد .

(b) همین مسأله را در مورد مثلثی حل کنید که راههای آن در محل برخورد خطهای كاغذ باشد .

(c) همین مسأله را در مورد چند ضلعی حل کنید (محدب یا مقعر که رأسهای آن در محل برخورد خطهای كاغذ باشد .

۲۰. روی ۴۴ درختی که روی محیط يك دایره قرار گرفته اند ، ۴۴ گنجشك نشسته است (روی هر درخت يك گنجشك) . هر چند لحظه يكبار دو تا از گنجشكها پرواز می کنند و هر کدام روی درخت مجاور خود می نشینند ، منتهی پرواز آنها در جهت مخالف هم است (يكی در جهت حركت عقربه های ساعت و دیگری در خلاف جهت آن) . آیا این احتمال وجود دارد که پس از مدتی گنجشكها روی يك درخت جمع شوند ؟

۲۱. يكی از سه نفر پراون ، جون و سمیت مرتكب اشتباهی می شوند . ضمن سؤال و جواب هريك از آنها دو جمله به این ترتیب بیان کردند :

پراون : من این اشتباه را نکرده ام .

جون هم مرتكب این اشتباه نشده است .

جون : براون این کار را نکرده است .

سمیت مقصر بوده است .

سمیت : من خلافی نکرده ام .

براون اشتباه کرده است .

معلوم شد که یکی از این سه نفر هر دو جواب را نادرست داده است، دیگری هر دو جواب را صحیح گفته است و سومی یکی از جوابها را درست و جواب دیگر را نادرست داده است . کار اشتباه را کدامیک کرده است ؟

۲۲. ۳۱ دانش آموز روی هم ۴۳۴ سال دارند . ثابت کنید که می توان از بین آنها ۲۰ دانش آموز جدا کرد که روی هم کمتر از ۲۸۰ سال نداشته باشند .

۲۳. (a) عددهای طبیعی را از ۱ تا ۶۰ روی يك سطر پشت سر هم نوشته ایم :

۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷... ۵۹۶۰

از عددی که بدست می آید صد رقم خط بزنید، به نحوی که عدد باقیمانده کوچکترین باشد .

(b) از همین عدد صد رقم خط بزنید، به نحوی که عدد باقیمانده بزرگترین باشد.

۲۴. (a) روی يك صفحه پنج نقطه داده شده به نحوی که هیچ سه نقطه ای از آن روی يك خط راست نیستند . ثابت کنید که می توان از بین آنها چهار نقطه انتخاب کرد که رأسهای يك چهار ضلعی محدب را تشکیل دهند .

(b) روی يك صفحه ۴۰۰۰ نقطه داده شده است ، به نحوی که هیچ سه نقطه ای از آنها روی يك خط راست نیستند . ثابت کنید که می توان ۱۰۰۰ چهار ضلعی ساخت که رأسهای آنها از بین این

نقطه‌ها انتخاب شده باشد و هیچکدام از آنها یکدیگر را قطع نکرده باشند .

۲۵. (a) به كمك پرگار و خط كش ، زاویه ۵۴ درجه را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید .

(b) به كمك پرگار و خط كش زاویه ۱۹ درجه را به ۱۹ قسمت مساوی تقسیم کنید .

۲۶. ثابت کنید که مجموع همه کسرهای با صورت ۱ و مخرجهای ۲ ، ۳ ، ۴ ، . . . ، n نمی‌تواند مساوی عددی صحیح بشود .

۲۷. در يك کنگره جهانی ۶ هیئت نمایندگی شرکت کرده‌اند . معلوم شد که بین هر سه هیئت ، دو هیئت می‌توانند زبان مشترکی بین خود داشته باشند . ثابت کنید که می‌توان سه هیئت نمایندگی از بین این ۶ هیئت جدا کرد ، به نحوی که هر کدام از آنها بتواند با هر يك از دو هیئت دیگر با زبان مشترکی صحبت کند .

۲۸. اگر یکی از قطره‌های يك چهارضلعی محدب بر قطر دایره محیطی آن منطبق باشد ، ثابت کنید تصویرهای ضلعهای روبروی چهار ضلعی بر قطر دیگر ، با هم برابرند .

۲۹. آیا می‌توان با ۱۰ اسکناس يك روبلی ، سه روبلی و پنج روبلی ۲۵ روبل پرداخت؟

۳۰. (a) شش نقطه روی يك صفحه وجود دارد ، به نحوی که هیچ سه نقطه‌ای از آن بر يك امتداد نیستند . ثابت کنید بین آنها سه نقطه وجود دارد که از وصل آنها به یکدیگر مثلثی بدست می‌آید که زاویه بزرگتر آن کمتر از ۱۲۰ درجه نیست .

(b) اگر روی يك صفحه پنج نقطه وجود داشته باشد ، با در نظر گرفتن هر سه نقطه آن ، روی هم می‌توان ۳۰ زاویه تشکیل داد . کوچکترین این زاویه‌ها را α می‌نامیم . این نقطه‌ها چگونه باشند

که زاویه α حداکثر مقدار ممکن شود؟

۳۱. عددهای صحیح x ، y و z را از معادله زیر پیدا کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

۳۲. از چهار ضلعی $ABCD$ ، چهار ضلع و زاویه بین دو ضلع AB و

CD معلوم است، آنرا رسم کنید.

۳۳. در يك شهر چند خط اتوبوسرانی وجود دارد (تعداد خطها بیش

از يکی است) و ضمناً:

(a) هر خط درست سه ایستگاه دارد.

(b) در هر خط فقط در يك ایستگاه می توان به اتوبوس خط دیگر

سوار شد.

(c) برای تمام ایستگاههای شهر، از هر ایستگاه به ایستگاه دیگر

می توان بدون عوض کردن اتوبوس و فقط با يك خط رفت.

چند خط اتوبوس در این شهر وجود دارد؟

۳۴. روی يك میز گرد دوازده نفری، ۱۲ کارت با نام مهمانها گذاشته

شده است. مهمانها آمدند و نشستند ولی نه به ترتیبی که معین

شده بود. ثابت کنید که می توان میز را به نحوی چرخاند که

لااقل دو نفر از مهمانها جلو کارت نام خود قرار گرفته باشند.

۳۵. مثلث متساوی الساقین ABC داده شده است. زاویه های BAC و

BCA هر کدام مساوی 80° درجه است. از رأسهای A و C دو خط در

داخل مثلث رسم کرده ایم تا ضلعهای مقابل را به ترتیب در نقطه های

D و E قطع کنند. زاویه CAD مساوی 60° درجه و زاویه ACE

مساوی 50° درجه است. مقدار زاویه ADE را بدست آورید.

۳۶. چادری روی چهار پایه، که در بالا به هم چفت شده اند، کشیده

شده است (به صورت يك هرم). ثابت کنید که می توان به هر پایه

قلابی آویزان کرد، به نحوی که این قلابها رأسهای يك متوازی-

الاضلاع را تشکیل دهند .

۳۷. ثابت کنید که اگر در مثلثی دو نیمساز داخلی برابر باشند ،
مثلث متساوی الساقین است .

۳۸. شش مدادگرد تیز نشده را طوری روی میز بگذارید که هر دو مداد
دلخواه بر هم مماس باشند .

۳۹. ثابت کنید که نمی توان خط راستی رسم کرد که همه ضلعهای
یک ۱۰۰۱ ضلعی را قطع کند .

۴۰. مجموع رقمهای عددی بعد از ضرب عدد در ۵ ، تغییر نمی کند .
ثابت کنید که این عدد بر ۹ قابل قسمت است .

۴۱. روی محیط دایره ای چهارتا عدد ۱ و پنج تا عدد ۰ را به ترتیب
دلخواه قرار می دهیم . سپس بین هر دو عدد مساوی ، عدد ۱ و بین
هر دو نامساوی ، عدد ۰ می گذاریم و عددهای اولیه را پاك می-
کنیم . ثابت کنید هر چند بار که این کار را ادامه دهیم ، هرگز هر
۹ عدد مساوی ۱ نمی شود .

۴۲. يك کارخانه ، محصول شیر خود را در پاکت های هر می با وجه های
مثلثی عرضه می کند . مدیر کارخانه که به ریاضیات علاقمند
است ، آگهی می کند که اگر کسی بتواند پاکتی به این شکل
بسازد ، به نحوی که هر یال آن لااقل مجاور به يك زاویه منفرجه
باشد ، جایزه ای خواهد گرفت . آیا شما می توانید چنین هر می
بسازید ؟

۴۳. ثابت کنید که از هر صد عدد صحیح دلخواه ، می توان يك یا چند
عدد انتخاب کرد به نحوی که مجموع آنها به دو صفر ختم شده
باشد .

۴۴. در يك دور بازی شطرنج ۸ نفر بازی کردند (هر دو نفر با هم
یکبار) و امتیازهای مختلفی بدست آوردند . تعداد امتیازهای

نفر دوم مساوی تعداد امتیازهای نفر پنجم تا هشتم روی هم شد .
در بازی نفرهای سوم و پنجم کدامیک برده اند ؟

۴۵. به چند طریق می توان عدد ۱۰۰۰۰۰۰۰ را به سه عامل تجزیه کرد
(عاملها را مخالف واحد بگیرید ، ضمناً اگر جای عاملها در تجزیه
تغییر کند ، تجزیه جدیدی به حساب نیاورید.)

۴۶. (a) عددی پیدا کنید که بر ۲ و ۹ قابل قسمت باشد و بجز خودش
و واحد ، روی هم ۱۴ مقسوم علیه داشته باشد .

(b) ثابت کنید که اگر در این مسأله ، تعداد مقسوم علیه ها را از
۱۴ به ۱۵ تغییر دهیم بیش از یک جواب خواهیم داشت و اگر ۱۴
را به ۱۷ تغییر دهیم ، مسأله بدون جواب است .

۴۷. نقطه ای پیدا کنید که مجموع فاصله های آن از چهار رأس يك
چهار ضلعی محدب حداقل مقدار ممکن باشد .

۴۸. حلزونی از نقطه A روی يك خط راست شروع به حرکت می کند و
بعد از هر ۱۵ دقیقه به اندازه ۹۰ درجه به يك طرف می پیچد . بعد
از چه مدت دوباره به نقطه A می رسد (سرعت حلزون را یکنواخت
به حساب آورید .)

۴۹. ثابت کنید که معادله $9 = 7y^2 - 15x^2$ جواب صحیح برای x و
 y ندارد ؟

۵۰. در اتاقی به مساحت ۶ متر مربع سه قالی با شکلهای دلخواه و
هر يك به مساحت سه متر مربع انداخته ایم . ثابت کنید دو قالی
طوری روی هم قرار می گیرند که سطح مشترك آنها کمتر از يك
متر مربع نیست .

اگر در همین اتاق ۴ قالی و هر يك به مساحت ۲ متر مربع پهن
کنیم ، جواب به چه صورت در می آید ؟

۵۱. صفحه کاغذ را به خانه های مربعی شکل تقسیم کرده ایم و در هر

خانه يك عدد مثبت نوشته‌ایم ، به نحوی که هر عدد برابر است با واسطه عددی عددهای چهارخانه مجاور آن : بالا ، پایین ، راست و چپ (واسطه عددی چهار عدد a, b, c و d یعنی عدد $\frac{a+b+c+d}{4}$) . ثابت کنید همه عددهای این جدول با هم برابرند .

۵۲. عددی در دستگاه به مبنای ۱۰ ، شامل ۳۰۰ رقم مساوی واحد و تعدادی رقم مساوی صفر است . آیا این عدد می‌تواند مربع کامل باشد ؟

۵۳. به سادگی می‌توان ۶۴ خانه صفحه شطرنج را با ۳۲ سنگ دومینو پوشاند ، به نحوی که هر سنگ دومینو روی دو خانه صفحه شطرنج قرار گرفته باشد (البته با این شرط که اندازه هر سنگ دومینو درست مساوی دو خانه شطرنج باشد) . آیا می‌توان با ۳۱ سنگ دومینو ۶۴ خانه صفحه شطرنج را طوری پوشاند که دو خانه‌ای که در دو گوشه مقابل صفحه شطرنج قرار گرفته‌اند ، خالی بماند ؟ بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد ۱۱۱۱۱۱۱ و ۱۱۱ ... ۱۱۱۱۱۱۱ (دارای صد رقم) را پیدا کنید .

۵۵. در داخل يك ۱۰۰ ضلعی محدب ۳۰ نقطه طوری انتخاب کرده‌ایم که از ۱۳۰ نقطه (۱۰۰ نقطه مربوط به رأسها و ۳۰ نقطه انتخابی) ، هیچ سه نقطه‌ای روی يك خط راست نباشند . ۱۰۰ ضلعی را به مثلثهایی چنان تقسیم می‌کنیم که مجموعه راههای آنها از ۳۰ نقطه انتخابی و ۱۰۰ رأس چند ضلعی تشکیل شده باشد . چند مثلث بدست می‌آید ؟

۵۶. a پاره خط AB و خط دلخواهی که آنرا قطع کرده است ، داده شده . مثلث ABC را چنان بسازید که این خط نیمساز زاویه C

از آن باشد .

(b) سه خط راست متقارب در صفحه‌ای داده شده است . روی یکی از این خطها نقطه‌ای مشخص می‌کنیم . مثلی بسازید که این نقطه یکی از رأسهای آن و سه خط متقارب سه نیمساز آن باشد .

۵۷. در يك جعبه ۱۰۰ گلوله با رنگهای مختلف وجود دارد: ۲۸ تا قرمز ، ۲۰ تا سبز ، ۱۲ تا زرد ، ۲۰ تا آبی ، ۱۰ تا سفید و ۱۰ تا سیاه . حداقل چند گلوله باید از جعبه خارج کرد (بدون اینکه به آنها نگاه کنیم) تا بین آنها ۱۵ گلوله هم‌رنگ وجود داشته باشد ؟

۵۸. مربعی بسازید که از هر ضلع آن يك نقطه معلوم باشد .

۵۹. آیا ممکن است مجموع مربعهای دو عدد متوالی مساوی مجموع توانهای چهارم دو عدد متوالی دیگر باشد ؟
به عبارت دیگر آیا عددهای صحیح و مثبت m و n وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم :

$$m^2 + (m+1)^2 = n^4 + (n+1)^4$$

۶۰. در يك مسابقه شطرنج دو نفر از کلاس چهارم و چند نفر از کلاس پنجم دبیرستان شرکت کردند . دو نفر کلاس چهارم روی هم ۸ امتیاز آوردند و با دانش‌آموزان بازیکن کلاس پنجم امتیازهای مساوی پیدا کردند . از کلاس پنجم چند نفر در مسابقه شرکت داشته‌اند ؟ (هر نفر با هر کدام از دیگران یکبار مسابقه داده است.) همه جوابها را پیدا کنید .

۶۱. می‌دانیم که در يك مثلث ، میانه ، ارتفاع و نیمسازی که از يك رأس گذشته‌اند ، زاویه این رأس را به چهار قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند . مقدار هر يك از زاویه‌های این مثلث را پیدا کنید .

۶۲. با شرط $a+b+c=1$ ثابت کنید :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$$

۶۳. روی میزگردی به شعاع R توانسته‌ایم n سکه به شعاع r قرار دهیم، به نحوی که حتی يك سکه دیگر هم نمی‌توان قرار داد. ثابت کنید:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} - 1 \right) < \sqrt{n} < \frac{R}{r}$$

۶۴. از بین عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۲۰۰، بطور دلخواه ۱۰۱ عدد انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید که بین این عددهای انتخاب شده می‌توان دو عدد پیدا کرد که یکی بر دیگری قابل قسمت باشد.

۶۵. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی N می‌توان عدد n رقمی پیدا کرد که همه رقمهای آن از صفر و واحد تشکیل شده باشد و ضمناً بر N قابل قسمت باشد (کمترین تعداد رقمهای این عدد را چگونه می‌توان بدست آورد؟)

۶۶. در مثلث ABC ، دو ارتفاع BH و AK را رسم کرده‌ایم. اگر O مرکز دایره محیطی مثلث باشد، ثابت کنید OC بر KH عمود است.

۶۷. از رأس A در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به نقطه‌های E و F وسط ضلعهای مقابل A ، یعنی BC و CD وصل کرده‌ایم. این دو خط قطر BD را در نقطه‌های M و N قطع کرده‌اند. ثابت کنید M و N قطر BD را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

۶۸. اگر طول يك چوب کبریت را واحد فرض کنیم، با ۱۲ چوب کبریت چند ضلعی بسازید که مساحت آن مساوی ۴ واحد مربع باشد.

۶۹. بین عددهایی که تمام رقمهای آن واحد است، کوچکترین عددی

را پیدا کنید که بر ۳۳ ... ۳۳ (شامل ۱۰۰ رقم) قابل قسمت باشد .

۷۰. يك جدول مربع شكل ۱۶ خانه‌ای داریم و در هر يك از خانه‌های آن يك علامت مثبت یا منفی گذاشته‌ایم . علامتهای خانه‌های يك سطر یا يك ستون را با هم به علامتهای مخالف خود تبدیل می‌کنیم . این عمل را آنقدر تکرار می‌کنیم تا تعداد علامتهای منفی به حداقل خود برسد . حداقل تعداد علامتهای منفی را که از يك حالت مفروض جدول به آن می‌رسیم ، مفسر آن می‌نامند . مفسر ، چه مقادیری را می‌تواند اختیار کند ؟ (همهٔ مقادیر ممکن را پیدا کنید .)

۷۱. در يك ۲۰ ضلعی محدب تمام قطرها را رسم کرده‌ایم . اگر هیچ سه قطری از يك نقطه نگذرد ، ۲۰ ضلعی به چند قسمت تقسیم می‌شود ؟

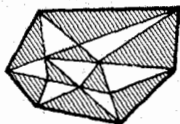
۷۲. طول ضلع يك مربع برابر است با واحد . از مرکز این مربع خط راست دلخواهی عبور داده‌ایم . مطلوب است مجموع مربعات فاصله‌های چهار رأس مربع از این خط .

۷۳. عبارت زیر را به ضرب چهار عامل تجزیه کنید :

$$x^8 + x^4 + 1$$

۷۴. دريك اجتماع از دانش‌آموزان ریاضی ۱۰۰ نفر شرکت کرده‌اند . می‌دانیم که بین هر چهار نفر شرکت کنندهٔ اجتماع لااقل یک نفر با سه نفر دیگر آشناست . ثابت کنید که می‌توان یک نفر را پیدا کرد که با هر ۹۹ نفر بقیه آشنا باشد . لااقل چند نفر از شرکت کنندگان این اجتماع با همهٔ ۹۹ نفر دیگر آشنا هستند ؟

۷۵. درشكل ۴ يك شش ضلعی را به مثلثهای سیاه و سفید چنان تقسیم کرده‌ایم که a هر دو مثلث یا يك ضلع مشترك دارند (که دراین



شکل ۴

صورت با رنگهای مختلف اند) یا يك رأس مشترك دارند و یا نقطه مشتركی ندارند. (b) هر ضلع شش ضلعی درعین حال ضلع یکی از مثلثهای سیاه است.

ثابت کنید که ده ضلعی را نمی توان به این ترتیب تقسیم بندی کرد.

۷۶. در دایره ای به شعاع واحد، يك ده ضلعی منتظم محاط کرده ایم. مطلوب است مجموع مربعات فاصله های نقطه دلخواهی از محیط دایره تا رأسهای این ده ضلعی.

۷۷. يك عدد چهار رقمی را در مقلوب خودش (یعنی عددی که از همان رقمها منتهی در جهت عکس درست شده است) ضرب کرده ایم؛ حاصل ضرب، عددی ۸ رقمی شده است که به سه رقم صفر ختم می شود. این عدد را پیدا کنید.

۷۸. مثلثی بسازید که از آن قاعده، زاویه رأس و میانه ضلع مجاور معلوم باشد.

۷۹. شش دایره در يك نقطه مشترکند. ثابت کنید لا اقل مرکز یکی از این دایره ها در داخل دایره دیگر قرار گرفته است.

۸۰. از ۷ رقم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ همه انواع ممکن عددهای هفت رقمی را ساخته ایم. ثابت کنید در بین آنها نمی توان دو عدد پیدا کرد که یکی بردیگری قابل قسمت باشد.

۸۱. سه زاویه مثلث ABC حاده است. از رأس A به نقطه O ، مرکز دایره محیطی مثلث وصل و ارتفاع AH را نیز رسم کرده ایم. ثابت کنید دو زاویه BAH و OAC برابرند.

۸۲. ثابت کنید به ازای همه مقادیر x داریم:

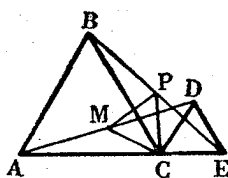
$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$$

۸۳. ثابت کنید :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200}$$

۸۴. وجه‌های يك مكعب را می‌توان تماماً با رنگ سفید یا تماماً با رنگ سیاه و یا بعضی را با رنگ سفید و بعضی را با رنگ سیاه رنگ کرد. به چند طریق مختلف می‌توان مربع را رنگ کرد؟ (دو مكعب را با رنگهای مختلف به حساب می‌آوریم به شرطی با چرخاندن یکی نتوان آنرا به وضع دیگری در آورد.)

۸۵. روی تخته‌ای که 100×4 خانه مربعی شکل دارد، قطعه‌های مستطیل شکل استخوانی گذاشته‌ایم، به نحوی که هریک از آنها درست دو خانه تخته را می‌پوشاند، و هیچکدام از آنها روی دیگری قرار نگرفته است و ضمناً هیچیک از خانه‌های تخته هم خالی نیست. ثابت کنید که می‌توان تخته را روی یکی از خطهای طولی یا عرضی برید، طوری که هیچکدام از استخوانها جابجا و یا بریده نشود.



شکل ۵

۸۶. روی CE که از امتداد ضلع AC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC بدست آمده است، مثلث متساوی‌الاضلاع CDE را ساخته‌ایم (آنطور که در شکل ۵ دیده می‌شود). M را وسط AD و P

را وسط BE گرفته‌ایم، ثابت کنید مثلث CMP متساوی‌الاضلاع است.

۸۷. به بیست دانش‌آموز ۲۰ مسأله داده شد. هردانش‌آموز ۲ مسأله را حل کرد و هر مسأله به وسیله ۲ دانش‌آموز حل شد. ثابت کنید که کار را می‌توان طوری تقسیم کرد که هردانش‌آموز حل

- يك مسأله را شرح دهد و همه مسأله‌ها هم توضیح داده شود .
- ۸۸ می‌دانیم که در يك ده ضلعی می‌توان دایره‌ای محاط کرد . از این ده ضلعی تمام زاویه‌ها و يك ضلع معلوم است ، آنرا رسم کنید .
- ۸۹ ثابت کنید رقمهای آخر عددهای

$$\frac{1 \times 2}{2} \text{ و } \frac{2 \times 3}{2} \text{ و } \frac{3 \times 4}{2} \text{ و } \dots \text{ و } \frac{n(n+1)}{2}$$

- بطور متناوب تکرار می‌شود .
- ۹۰ در ۶۴ خانه صفحه شطرنج ، عددهای از ۱ تا ۶۴ را نوشته‌ایم (در سطر بالا از چپ به راست عددهای ۱ تا ۸ ، سپس در سطر دوم از چپ به راست عددهای از ۹ تا ۱۶ و غیره .) هشت رخ را در خانه‌های صفحه شطرنج طوری گذاشته‌ایم که هیچیک از آنها نمی‌تواند دیگری را بزند . مطلوب است مجموع عددهای خانه‌هایی که رخها در آنها قرار گرفته‌اند . همه مقادیری را که این مجموع می‌تواند داشته باشد پیدا کنید .

- ۹۱ در تجزیه حاصلضرب زیر به عاملهای اول چه توانی از ۲ وجود دارد ؟

$$2n(2n-1)(n+1)(n+2)(n+3)\dots$$

- ۹۲ در مثلث متساوی‌الساقین ABC از نقطه H وسط قاعده BC عمود HE را بر ضلع AC فرود آورده‌ایم . اگر O وسط پاره‌خط HE باشد ، ثابت کنید خطهای AO و BE برهم عمودند .

- ۹۳ نقطه A را داخل دایره‌ای انتخاب کرده‌ایم (غیر از مرکز .) آیا همیشه می‌توان از نقطه A شعاع نور را طوری فرستاد که بعد از چند بازتاب در محیط دایره ، دوباره به نقطه A برگردد؟ (در بازتاب نور ، همیشه زاویه تابش با زاویه بازتاب برابر است .)

- ۹۴ خط شکسته بسته‌ای از ۲۰۳ پاره‌خط تشکیل شده است که هیچ

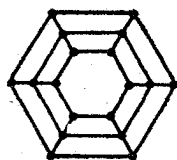
دوپاره خطی از آن روی يك خط راست نیستند . حداکثر تعداد نقطه‌های تلاقی این خطها (بجز نقطه‌های تلاقی دوپاره‌خط متوالی) چقدر است ؟

۹۵. از پنج دایره هر چهار دایره يك نقطه مشترك دارند . ثابت کنید که هر پنج دایره دارای نقطه مشتركند .

۹۶. دو متحرك از نقطه‌های A و B ، واقع روی دو خطی که در نقطه O متقاطع‌اند ، با يك سرعت حرکت کردند . پاره‌خطی رسم کنید که مساوی کوتاهترین فاصله بین دو متحرك باشد . به شرطی که زاویه ADB مساوی 90° درجه ، $OA=a$ و $OB=b$ و سرعت متحرکها مساوی V باشد ، پس از چه مدتی از شروع حرکت ، این دو متحرك به حداقل فاصله می‌رسند ؟

۹۷. a هر قطر چهار ضلعی آنرا به دو مثلث با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کند . ثابت کنید که این چهار ضلعی ، متوازی‌الاضلاع است .

b ثابت کنید که اگر در يك شش ضلعی محدب ، هریک از سه قطری که رأسهای روبرو را به هم وصل می‌کند ، مساحت شش ضلعی را نصف کند ، این سه قطر در يك نقطه یکدیگر را قطع خواهند کرد .



شکل ۶

۹۸. روی ۱۸ نقطه‌ای که در شکل ۶ نشان داده شده است ، عددهای از ۱ تا ۱۸ را نوشته‌ایم . ثابت کنید می‌توان پاره‌خطی پیدا کرد که در دو انتهای آن عددهایی با اختلاف بزرگتر از ۳ وجود داشته باشد .

۹۹. a ثابت کنید که با شرط $m \neq n$ ، عددهای $2^m + 1$ و $2^n + 1$

مقسوم علیه مشترکی ندارند .

(b) ثابت کنید که عددهای $2^m - 1$ و $2^n - 1$ (m و n عددهای طبیعی اند) تنها و تنها وقتی نسبت به هم اولند که m و n نسبت به هم اول باشند .

۱۰۰. دوزنقه ای را با خط مستقیم چنان قطع کنید که دو چهار ضلعی متشابه بدست آید .

۱۰۱. سه نقطه A ، B و C مفروض اند، به نحوی که روی يك خط راست قرار نگرفته اند . خط راستی رسم کنید ، طوری که AC را در X و BC را در Y قطع کند و داشته باشیم : $AX = XY = YB$.

۱۰۲. ثابت کنید که برای سه عدد مثبت a ، b و c نمی تواند سه نامساوی زیر با هم برقرار باشد :

$$a(1-b) > \frac{1}{4} \text{ و } b(1-c) > \frac{1}{4} \text{ و } c(1-a) > \frac{1}{4}$$

۱۰۳. ثابت کنید :

$$(a+b)^4 \leq 8(a^4 + b^4) \quad (a)$$

$$(a+b)^{100} < 2^{100}(a^{100} + b^{100}) \quad (b)$$

۱۰۴. دو میله AB به طول a و BC به طول b در نقطه B به هم لولا شده اند . روی پاره خط AC مثلث متساوی الاضلاع ACE را می سازیم ، میله ها را چگونه قرار دهیم که فاصله BE حداکثر مقدار ممکن باشد ؟

۱۰۵. ثابت کنید بین مستطیل های محاط در يك نیم دایره ، محیط بزرگتر متعلق به مستطیلی است که طول آن چهار برابر عرض آن باشد .

۱۰۶. ثابت کنید ، سطح يك مثلث غیر مشخص (غیر متساوی الاضلاع) را می توان بطور کامل به وسیله دو مثلث متشابه با آن و کوچکتر از آن پوشاند .

۱۰۷. از نقطه P واقع در داخل يك ذوزنقه متساوی الساقین به چهار رأس آن وصل کرده ایم . ثابت کنید با چهار پاره خطی که بدست می آید می توان يك چهار ضلعی قابل محاط در ذوزنقه ساخت (یعنی چهار ضلعی که بتواند هر رأس آن روی یکی از ضلعهای ذوزنقه باشد .)

۱۰۸. از مقوا دو دایره بریده ایم که یکی کوچکتر از دیگری است . هر يك از دایره ها را با رسم شعاع به ۲۰۰ قطاع مساوی تقسیم کرده ایم ، ضمناً صد قطاع دلخواه از هر دایره را سیاه و صد قطاع باقیمانده را سفید کرده ایم . دایره ها را طوری روی هم قرار داده ایم که مرکزهای آنها برهم واقع باشد . ثابت کنید ، دایره کوچکتر را می توان طوری بر دایره بزرگتر قرار داد که لااقل صد قطاع همرنگ از دو دایره بر هم منطبق شود .

۱۰۹. ثابت کنید که اگر سه عدد x ، y و z در دستگاه معادله های

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

صدق کند ، لااقل یکی از این عددها مساوی a خواهد بود .

۱۱۰. سه نقطه A ، B و K داده شده است . می خواهیم از نقطه K خط راستی عبور دهیم که مجموع فاصله های دو نقطه A و B از آن : a (حداقل باشد ؛ b) حداکثر باشد .

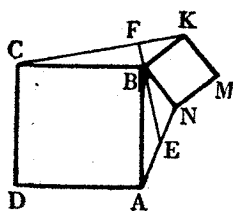
۱۱۱. a سه عدد مثبت ، صحیح و متمایز پیدا کنید که مجموع هر دو عدد از آن بر عدد سوم قابل قسمت باشد (همه جوابها را پیدا کنید .)

b سه عدد ۱ ، ۲ و ۳ دارای این خاصیت هستند که اگر به حاصل ضرب دوتا از آنها يك واحد اضافه کنیم ، حاصل بر عدد سوم

قابل قسمت است . همه گروه عددهای سه تایی را پیدا کنید که این خاصیت را داشته باشند .

۱۱۲. جدول مربعی شکلی را به 25×25 خانه تقسیم کرده ایم و در 625 خانه ای که بدست می آید 25 عدد اولیه ، یعنی $1, 2, 3, \dots, 25$ را نوشته ایم . ضمناً : (a) در خانه هایی که نسبت به قطر اصلی مربع قرینه اند ، عددهای مساوی گذاشته ایم ؛ (b) در يك سطر یا يك ستون ، 25 عدد مختلف قرار داده ایم . ثابت کنید تمام عددهایی که روی قطر اصلی مربع قرار دارند مختلف اند .

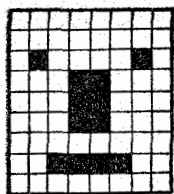
$\wedge \quad \wedge \quad \wedge$
 ۱۱۳. سه نقطه A, B و C و سه زاویه H, K و M روی يك صفحه داده شده است . هريك از زاویه ها کوچکتر از 180° درجه و مجموع آنها مساوی 360° درجه است . به كمك خط كش و نقاله ، نقطه O را طوری پیدا کنید که $AOB = H, BOC = K$ و $COA = M$ (به كمك نقاله می توان زاویه را طوری جابجا کرد که يك ضلع آن بر امتدادی که از قبل معلوم است ، قرار گیرد) .



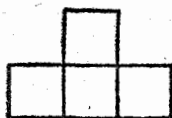
شکل ۷

۱۱۴. $ABCD$ و $BKMN$ دو مربع اند . ثابت کنید که اگر میانه BE از مثلث ABN را از طرف رأس B امتداد دهیم ، ارتفاع مثلث KBC بدست می آید (شکل ۷) .

۱۱۵. ثابت کنید شکل 60° خانه ای شکل ۸ را نمی توان به مستطیل های سه خانه ای تقسیم کرد .



شکل ۸



شکل ۹

۱۱۶. ثابت کنید که صفحه شطرنجی 10×10 خانه‌ای را نمی‌توان به‌طور کامل به کمک شکلهای شبیه شکل ۹ پوشانید (این شکلهای را روی صفحه شطرنجی باید طوری قرار داد که درست هر خانه آن یکی از خانه‌های صفحه شطرنجی را بپوشاند. فرض بر این است که هر خانه شکل ۹ با هر خانه صفحه شطرنجی برابر باشد).

۱۱۷. روی يك صفحه، به اندازه $n > 3$ نقطه داده شده است، به نحوی که هیچ سه نقطه آن روی يك خط راست واقع نیستند. آیا همیشه می‌توان از بین این نقطه‌ها، سه نقطه پیدا کرد، طوری که وقتی دایره‌ای از آنها عبور می‌دهیم شامل هیچکدام از نقطه‌های دیگر نباشد؟ (یعنی هیچکدام از $n - 3$ نقطه دیگر در داخل این دایره قرار نگیرند).

۱۱۸. ثابت کنید که روی صفحه شطرنجی $n \times 4$ ، اسب نمی‌تواند طوری حرکت کند که از هر خانه یکبار عبور کرده باشد و در آخرین حرکت به خانه اولیه باز گردد.

۱۱۹. n نقطه روی يك صفحه چنان قرار گرفته‌اند که هر چهارتا از آنها چهار رأس يك چهارضلعی محدب را تشکیل می‌دهند. ثابت کنید که همه این نقطه‌ها رأسهای يك n ضلعی محدب‌اند.

۱۲۰. ثابت کنید که بی‌نهایت عدد طبیعی می‌توان پیدا کرد که نشود آنها را به صورت مجموع مکعبهای سه عدد طبیعی نوشت.

۱۲۱. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، عدد $10^n + 18n - 1$ بر ۲۷ قابل قسمت است.

۱۲۲. N عددی است طبیعی که از ۱۰ کوچکتر نیست. رقم سمت راست این عدد را حذف کرده ایم، عددی را که بدست می آید به دو برابر رقم حذف شده، اضافه کرده ایم تا عدد N_1 بدست آید. ثابت کنید دو عدد N و N_1 یا هردو بر ۱۹ قابل قسمت اند و یا هیچکدام بر ۱۹ قابل قسمت نیستند.

۱۲۳. ثابت کنید در هر مثلث غیر مشخص، مجموع طولهای میانه ها کمتر از محیط آن است.

۱۲۴. ثابت کنید مساحت يك چهارضلعی به ضلعهای a, b, c, d از $\frac{ac+bd}{2}$ تجاوز نمی کند.

۱۲۵. به جای ستاره ها، در عدد زیر، چه رقمهایی قرار دهیم تا عدد حاصل بر ۱۳ قابل قسمت باشد:

۳*****۳

۱۲۶. می دانیم که $n!$ یعنی حاصلضرب $n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$. اگر $۳۵!$ چنین باشد:

۱۰۳۳۳۱۴۷۹۶۶۳۸۶۱۴۴۹۲۹*۶۶۶۵۱۳۳۷۵۲۳۲۰۰۰۰۰۰۰۰۰

رقمی را که با ستاره مشخص شده است، پیدا کنید.

۱۲۷. مطلوب است محاسبه خارج قسمت تقسیم $a + a^2 + \dots + a^{100}$ بر $a^{-1} + a^{-2} + \dots + a^{-100}$.

۱۲۸. a ثابت کنید که نمی توان در يك سطر ۵۰ عدد حقیقی طوری نوشت که مجموع هر ۷ عدد پشت سر هم مثبت و مجموع هر ۱۱ عدد پشت سر هم منفی باشد.

b در يك سطر، ۵۰ عدد طوری بنویسید که مجموع هر ۴۷ عدد پشت سر هم آن مثبت و مجموع هر ۱۱ عدد پشت سر هم آن منفی باشد.

۱۲۹. عدد دو رقمی پیدا کنید که مجذور آن مساوی مکعب مجموع رقمهای آن باشد.

۱۳۰. این دستگاه را حل کنید :

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2y - xy + 2x - 2 = 0 \\ x^3y - 3x^2y^2 - xy^2 + 2xy + x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

۱۳۱. ثابت کنید که ضمن تقسیم يك عدد اول بر ۳۰ ، برای باقیمانده ۱ و یا يك عدد اول بدست می آید .

۱۳۲. مطلوب است بزرگترین مقسوم علیه مشترك هزارمین و هفتصد و هفتادمین عدد از رشته فیبوناچی . (رشته فیبوناچی عبارت است از :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

که در آن ، از عدد سوم به بعد ، هر عدد برابر است با مجموع دو عدد قبلی آن .)

۱۳۳. اگر دو زاویه روبرو از يك چهارضلعی منفرجه باشد، ثابت کنید قطر بزرگتر، مقابل به این دو زاویه است .

۱۳۴. ثابت کنید که هیچ عدد اولی را نمی توان به دو صورت مختلف به مجموع مربعهای دو عدد طبیعی تبدیل کرد.

۱۳۵. عددی چند رقمی پیدا کنید که اگر رقمهای آنرا به ترتیب عکس بنویسیم، مقسوم علیه ای از عدد اصلی باشد و خارج قسمت مساوی واحد نشود .

۱۳۶. مطلوب است کوچکترین عدد مثبتی که نصف آن مجذور کامل لا ثلث آن مکعب کامل و يك پنجم آن توان پنجم کامل يك عدد صحیح باشد .

۱۳۷. $n \geq 2$ عددی است صحیح و مثبت . حاصلضرب همه عددهای اولی را که از n بزرگتر نباشند ، به صورت $n^?$ نشان می دهیم . مطلوب است همه مقادیر n که برای آنها $n^? \leq n$ باشد .

۱۳۸. يك چهار ضلعی محدب داده شده است . نقطه‌ای در داخل این چهارضلعی پیدا کنید که اگر از آنجا به وسط چهار ضلع وصل کنیم، چهارضلعی به چهار قسمت با مساحت‌های مساوی تقسیم شود .

۱۳۹. رأس P از مثلث متساوی‌الاضلاع PKM ثابت و رأس K روی محیط مربعی مثل Q حرکت می‌کند ، مکان هندسی M ، رأس سوم مثلث را پیدا کنید .

۱۴۰. دو پاره‌خط AB و CD روی يك صفحه مفروض است. نقطه O را طوری پیدا کنید که زاویه‌های AOB و COD مساوی و مثلثهای AOB و COD متشابه باشند .

۱۴۱. در خانه‌های يك جدول مربعی که شامل $n \times n$ خانه است ، عددهایی قرار داده‌ایم . مجموع عددهایی که در هریک از «صلیبها» قرار گرفته است کمتر از a نیست («صلیب» را به شکلی می‌گوییم که از يك سطر کامل و يك ستون کامل درست شده باشد .) حداقل مجموع همه عددهای جدول چقدر است ؟

۱۴۲. در يك صفحه ۱۰۰۰۰۰۰ خط غیرموازی قرار داده‌ایم . می‌دانیم که از نقطه برخورد هر دو خط دلخواه لااقل يك خط دیگر می‌گذرد. ثابت کنید که همه این خطها از يك نقطه می‌گذرند .

۱۴۳. خورشید در استوا در اوج (سمت الرأس) است . قوطی کبریت را روی میز چگونگی بگذاریم تا سایه آن حداکثر مساحت را داشته باشد ؟ همین مسأله را در مورد پاکت شیر (هرم مثلث‌القاعده) هم حل کنید .

۱۴۴. روی شش وجه يك مکعب شش عدد نوشته‌ایم ، که در بین آنها ۰ و ۱ هم وجود دارد. هر عدد را با واسطه عددی چهار عدد وجه‌های مجاور عوض کرده‌ایم. در مورد عددهای جدید همان عمل را

تکرار کرده‌ایم و به همین ترتیب با عددهای جدید عمل کرده‌ایم تا ۲۵ مرتبه. در پایان کار، روی هر وجه همان عددی وجود داشت که در ابتدا نوشته بودیم. ثابت کنید که در محاسبه‌ها اشتباهی رخ داده است.

۱۴۵. در هر يك از هشت رأس يك مكعب عددی قرار داده‌ایم که در بین آنها ۱۰ و ۱ هم وجود دارد. هر يك از هشت عدد را با واسطه حسابی سه عددی که در سه رأس مجاور آن قرار گرفته‌اند، عوض کرده‌ایم. بعد از آنکه این عمل را ده بار تکرار کردیم، در هر رأس همان عددهایی که در ابتدا وجود داشتند، پیدا شد. این هشت عدد را پیدا کنید.

۱۴۶. در داخل يك دوزنقه غیر مشخص، نقطه‌ای پیدا کنید که مجموع فاصله‌های آن تا ضلعها (یا امتداد آنها) حداقل باشد.

۱۴۷. در داخل يك مثلث نقطه‌ای پیدا کنید که مجموع فاصله‌های آن از سه ضلع (a : حداقل، b : حداکثر) باشد.

۱۴۸. سه عدد متفاوت k ، l و m را طوری پیدا کنید که مجموع $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m}$ کمتر از $\frac{1}{4}$ و تا حد امکان به $\frac{1}{4}$ نزدیک باشد.

چهار عدد متفاوت k ، l ، m و n را طوری پیدا کنید که مجموع $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ کمتر از ۱ و تا حد امکان به ۱ نزدیک باشد.

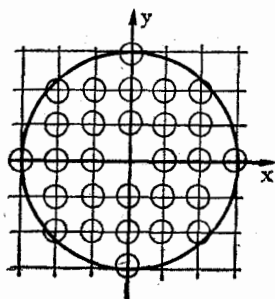
۱۴۹. شعاع نور حداکثر چند مرتبه می‌تواند از ضلعهای زاویه ۱ درجه منعکس شود؟ (در هر انعکاس زاویه فرود با زاویه انعکاس برابر است.)

۱۵۰. شعاع نور بارها از ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع ABC منعکس می‌شود. فرض می‌کنیم که در يك فاصله زمانی، شعاع نور ۴ مرتبه از ضلع AB ، x مرتبه از ضلع AC و y مرتبه از ضلع BC

منعکس شده باشد. x و y چه عددهایی می‌توانند باشند؟ (همه حالت‌های ممکنه را پیدا کنید.)

۱۵۱. در يك صفحه شطرنجی 10×10 خانه‌ای شکلی را در نظر می‌گیریم (و مثلاً نام آنرا «شیر» می‌گذاریم) که می‌تواند يك حرکت به راست، يك حرکت به زیر و يك حرکت روی قطر به سمت چپ و بالا بکند. آیا شیر می‌تواند از خانه‌ای شروع به حرکت کند و از هرخانه یکبار بگذرد و دوباره به خانه اول برگردد؟

۱۵۲. دو نفر با هم شطرنج بازی می‌کنند و قرار می‌گذارند که هرکدام از آنها بتواند دو حرکت پشت سرهم انجام دهد. ثابت کنید که در این بازی سفید می‌تواند همیشه برنده باشد و یا لاقل مساوی کند.



شکل ۱۰

۱۵۳. در يك پارك درختها را طوری کاشته‌اند که مرکزهای آنها روی رأسهای مربعیایی به ضلع ۱ قرار گرفته‌اند. تمام پارك به شکل دایره‌ای به شعاع مساوی s است (شکل ۱۰). ساقه درختها به چه قطری باید برسد، تا دید ناظری را

که در مرکز دایره قرار گرفته است، بطور کامل بپوشانند؟

ثابت کنید که اگر شعاع همه درختها از $\frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$ کمتر باشد،

دید پوشیده نیست و اگر شعاع همه درختها از $\frac{1}{s}$ بزرگتر باشد، دید پوشیده است.

۱۵۴. روی سیاره‌ای که به شکل کره است، تعدادی کشور وجود دارد.

هر کشور یا از يك قطعه تشکیل شده است و یا از دو قطعه‌ای که به هم متصل نیستند .

می‌خواهیم نقشه این سیاره را به این ترتیب رنگ کنیم که اولاً قلمرو هر کشور يك رنگ داشته باشد ، ثانیاً هر دو کشور مجاور که مرز مشترك دارند با دو رنگ مختلف نشان داده شده باشد . ثابت کنید که دوازده رنگ مختلف همیشه کافی است ، ولی یازده رنگ ممکن است کافی نباشد .

۱۵۵. چند کشور روی دو سیاره وجود دارد ، ضمناً قلمرو بعضی از کشورها تنها روی یکی از سیاره‌ها و قلمرو بعضی کشورهای دیگر روی هر دو سیاره است (قلمرو هر حکومت در يك سیاره از قسمتهای بدون ارتباط با هم تشکیل نشده است .)

ثابت کنید که اگر بخواهیم نقشه این کشورها را طبق شرایط مسأله ۱۵۴ رنگ کنیم ، ۱۲ رنگ همیشه کافی است . ثابت کنید که هفت رنگ ممکن است کافی نباشد .

۱۵۶. يك توده سنگریزه وجود دارد . دو طرف بازیکن هر کدام به نوبت از سنگریزه‌ها بر می‌دارند . در هر نوبت می‌شود يك ، دو یا سه سنگریزه برداشت . کسی برنده است که آخرین سنگریزه‌ها را بردارد . تعداد سنگریزه‌ها چقدر باشد تا آن که بازی را شروع کرده است برنده شود (یعنی طرف هر طور بازی کند ، او بتواند پیروز شود).

۱۵۷. (a) دو نفر روی صفحه شطرنج بازی می‌کنند و به نوبت يك شاه را حرکت می‌دهند . حرکت می‌تواند يك خانه به طرف چپ ، پایین و در جهت قطری به طرف پایین و چپ باشد . کسی بازی را می‌برد که موفق شود شاه را در خانه چپ و پایین جدول قرار دهد . شاه در وضع اولیه در کدام خانه‌ها باشد ، تا کسی که بازی را شروع کرده است برنده شود ؟

(b) دو توده سنگریزه داریم . دو بازیکن به نوبت از سنگریزه‌ها برمی‌دارند . هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند يك سنگریزه از يك توده یا از هر توده يك سنگریزه بردارد . کسی بازی را می‌برد که آخرین سنگریزه‌ها را بردارد . در توده‌ها چند سنگریزه باشد تا آن‌که بازی را شروع کرده است برنده شود ؟

۱۵۸. در ذوزنقه $ABCD$ با قاعده‌های $AD = a$ و $BC = b$ ($a > b$) وسط قطرهای را B_1 و C_1 می‌گیریم . در چهار ضلعی AB_1C_1D دوباره وسط قطرهای را B_2 و C_2 می‌نامیم . بعد از n مرحله ، نقطه‌های B_n و C_n بدست می‌آید . طول B_nC_n را پیدا کنید .

(b) اگر $n \rightarrow \infty$ صد B_nC_n چقدر است ؟

(c) برای چه ذوزنقه‌ای پاره خطهای B_nC_n با هم برابرند ؟

۱۵۹. تعدادی سنگ ترازو داریم که وزن هیچکدام از آنها از ۵۰۰ گرم تجاوز نمی‌کند . می‌دانیم که نمی‌توان این سنگها را طوری به دو قسمت کرد که وزن هر دو دسته از ۵۰۰ گرم تجاوز کند . حداکثر وزن کلی این سنگها چقدر است ؟

۱۶۰. چهار خط راست روی يك صفحه چنان قرار گرفته‌اند که هیچ دو خطی با هم موازی و هیچ سه خطی متقارب نیستند . روی هر يك از خطها پیاده‌ای با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند (سرعت دو پیاده مختلف می‌تواند با هم فرق داشته باشد .) می‌دانیم که پیاده اول با هر يك از پیاده‌های دوم ، سوم و چهارم و پیاده دوم با هر يك از پیاده‌های سوم و چهارم برخورد می‌کند . ثابت کنید پیاده سوم با پیاده چهارم برخورد خواهد داشت .

۱۶۱. در يك دور بازی فوتبال سه تیم ردیف اول به ترتیب ۷ ، ۵ و ۳ امتیاز آوردند . در این دور چند تیم بازی کرده است و تیمهای

ردیف آخر هر کدام چند امتیاز آورده اند؟ (در هر بازی برای بردن ۲ امتیاز، برای مساوی ۱ امتیاز به حساب می آید و برای باخت امتیازی وجود ندارد. اگر تعداد امتیازهای دو تیم مساوی باشد، ردیف آنها بر حسب تعداد گل‌های رد و بدل شده معین می شود.)

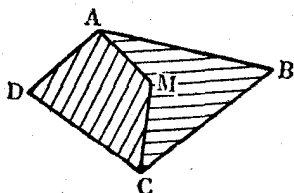
۱۶۲. n سنگ ترازو به وزنهای ۱، ۲، ۳، ۴، ...، n گرم داریم. می خواهیم آنها را به سه قسمت با وزنهای مساوی تقسیم کنیم. به ازای چه مقادیری از n این تقسیم ممکن است؟

۱۶۳. روی نیمساز يك زاویه، نقطه ای مانند P اختیار کرده ایم. از این نقطه خطی رسم کرده ایم تا روی دو ضلع زاویه قطعه هایی مساوی a و b جدا کند. ثابت کنید که مقدار $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ به انتخاب خطی که از P می گذرد مربوط نیست.

۱۶۴. ۱۷ ضلعی محدبی را به وسیله قطرهایش به چند ضلعیهای کوچکتر تقسیم کرده ایم. حداکثر تعداد ضلعیهایی که یکی از این چند ضلعیهای کوچکتر می تواند داشته باشد چقدر است؟

۱۶۵. همه عددهای طبیعی را در نظر می گیریم که تنها از رقمهای ۰ و ۱ تشکیل شده باشند. این عددها را به دو گروه چنان تقسیم کنید که مجموع هر دو عدد دلخواه از يك گروه شامل لا اقل دو رقم مساوی ۱ باشد.

۱۶۶. چهار ضلعی محدب $ABCD$ داده شده (شکل ۱۱). مطلوب است مکان هندسی نقطه M ، به نحوی که مساحتیهای دو شکل $ABCM$ و $ADCM$ برابر باشند.



شکل ۱۱

۱۶۷. ۷ سکه داریم که از لحاظ ظاهر هیچ تفاوتی با هم ندارند، ولی می‌دانیم که ۵ سکه حقیقی و ۲ سکه تقلبی است. سکه حقیقی ۱۰ گرم و سکه تقلبی $9/8$ گرم وزن دارد. به کمک یک ترازو و بدون در دست داشتن هیچ وزنه‌ای، حداقل چندبار باید آزمایش کرد تا سکه‌های تقلبی پیدا شود؟

۱۶۸. یک چهارضلعی محدب به وسیله قطره‌هایش به چهار مثلث تقسیم شده است، که مساحت هر کدام از آنها با یک عدد صحیح بیان می‌شود. ثابت کنید حاصلضرب این چهار عدد مجذور کامل است.

۱۶۹. در یک قوطی ۲۷ چوب کبریت وجود دارد. دو نفر به نوبت هر کدام یک یا دو یا سه یا چهار چوب کبریت می‌توانند بردارند. بازی را کسی برده است که تعداد چوب کبریت‌هایش پس از پایان کار زوج باشد:

(a) با بازی صحیح کدامیک برنده‌اند: آنکه بازی را شروع کرده است یا رقیب او؟

(b) اگر بطور کلی در قوطی $2n+1$ چوب کبریت وجود داشته باشد و بتوان بین ۱ تا m چوب کبریت برداشت کرد، جواب چگونه است؟

۱۷۰. صد مهره مختلف را کنار هم، در یک ردیف، چیده‌ایم. می‌توانیم جای هر دو مهره‌ای را که یک مهره بین آنها قرار گرفته باشد، عوض کنیم. آیا می‌توانیم به این ترتیب، مهره‌ها را به ردیف عکس در آوریم؟

*

۱۷۱. در چهارم تیرماه سال ۱۳۴۴، تاریخ را می‌توان اینطور نوشت:

$44/4/4$

در این نوشته، تنها از یک رقم برای نوشتن تاریخ روز استفاده

شده است .

حالا به این پرسش پاسخ دهید : در طول يك قرن چند مرتبه چنین وضعی پیش می آید که با نوشتن عددهای روز ، ماه و دو رقم سمت راست قرن ، تنها از يك رقم استفاده شده باشد ؟ در جواب دادن عجله نکنید ! فکر کنید !

۱۷۲. قطاری در چند شبانه روز از A به B می رود و سپس از B به A برمی گردد ، برنامه حرکت قطار را در رفت و برگشت چگونه تنظیم کنیم ، تا هر فاصله ای از مسیر را که قطار ضمن رفتن در روز (یعنی ۶ صبح تا ۶ عصر) طی می کند ، ضمن برگشتن در شب (۶ عصر تا ۶ صبح) طی نماید ؟ سرعت حرکت قطار در هر دو جهت یکنواخت است .

۱۷۳. وزن يك تراورس کاج $۲۷\frac{۴}{۵}$ کیلوگرم و يك تراورس بلوط $۴۵\frac{۱}{۴}$

کیلوگرم است . وزن ۱۰ تراورس از این دو نوع روی هم $۳۸۴\frac{۱}{۵}$ کیلوگرم شده است . بین آنها چند عدد از چوب کاج و چند عدد از چوب بلوط بوده است ؟

البته این مسأله به کمک يك دستگاه دو معادله دو مجهولی بطور عادی قابل حل است . ولی با عددهای این مسأله راه حل ساده ای وجود دارد که حتی بدون محاسبه و به کمک فکر می توان به آن رسید .

۱۷۴. پستیچی نقل می کرد :

من امروز پنج مرتبه به طبقه دهم و ده مرتبه به طبقه پنجم رفته ام . اگر من بعد از هر تحویل نامه پایین نمی آمدم و در تمام مدت به طرف بالا می رفتم ، به طبقه ... می رسیدم !
به کدام طبقه ؟

۱۷۵. در يك واحد مسكونی كه از سه ساختمان چهار طبقه تشكيل شده است ، چند نفر زندگی می كنند ، به شرطی كه بدانیم :
- (۱) در ساختمان A ، ۳۹ نفر بیشتر از ساختمان B و ۷۷ نفر کمتر از ساختمان C زندگی می كنند .
- (۲) از هر ۱۳ بچه ۷ نفر تحصیل می كنند .
- (۳) در اول ماه مهر مسئولین اداره واحد مسكونی ۱۴۰۰ كارت تبريك خریدند ، بیش از نیمی از كارتها به واحدهای دیگر مسكونی فرستاده شد و بقیه بین ساكنین واحد مسا تقسیم شد :
- به هر نفر يك كارت .
- (۴) بزرگها ۲۰٪ بیشتر از بچهها هستند .
- (۵) اگر به طبقه‌های اول ۱۷ نفر جدید وارد شود و از طبقه‌های دوم ۱۱ نفر به طبقه‌های سوم برود و از طبقه‌های چهارم ۱۵ نفر خارج بشود ، در تمام چهار طبقه عدد ساكنین مساوی می شود .
۱۷۶. چند عدد پنج رقمی مختلف وجود دارد كه لااقل یکی از رقمهای آن مساوی پنج باشد ؟

۱۷۷. (a) در عدد ۱۲۵۷۸ ، هر رقم از رقم قبل از خودش بزرگتر است . روی هم چندتا از این عددها وجود دارد؟ ابتدا جواب را به تقریب بگوئید و سپس محاسبه كنید .

(b) شرط را «عكس» حالت قبل می گیریم : می خواهیم تعداد عددهایی را پیدا كنیم كه در آن هر رقم از رقم قبل از خودش كوچكتر باشد .

۱۷۸. عدد π را به تقریب در دستگاه عدد شماری به مبنای ۷ بنویسید .

۱۷۹. امروز من باید به پنج جا بروم : داروخانه ، آرایشگاه ، كتابفروشی ، بانك و پستخانه . برای اینکه كوتهترین مسیر را پیدا كنم ، تصمیم گرفتم قبل از خارج شدن از منزل تمام مسیرهای

ممکن را مقایسه کنم .

اگر بانک و پستخانه در يك ساختمان واقع باشند و این ساختمان نسبت به بقیه جاها از منزل من دورتر باشد ، چند مسیر مختلف را باید با هم مقایسه کنم ؟

۱۸۰. تاجری هر سال ۱۰۰ فونت از دارایی خود را برای مخارج خانواده اش برمی داشت و يك سوم آنچه که برایش می ماند ، به سرمایه اش اضافه می کرد . بعد از سه سال سرمایه اش دو برابر شد . دارایی اولیه او چقدر بوده است ؟ (مسأله نیوتون از کتاب حساب عمومی سال ۱۷۰۷) .

۱۸۱. دو آلیاژ از نقره و طلا داریم . در یکی مقدار نقره ۴۰٪ و در دیگری مقدار طلا $1\frac{1}{4}$ برابر نقره است .

از هر آلیاژ چقدر برداریم تا $17\frac{1}{3}$ کیلوگرم آلیاژ بدست آید که در آن نسبت مقدار طلا به مقدار نقره مثل ۳:۲ باشد ؟

۱۸۲. چهار مسافر که مسیرشان یکی بود يك تاکسی سوار شدند . وقتی که اولی پیاده شد ، a_1 ریال پرداخت که مساوی يك چهارم مبلغی بود که تاکسی متر نشان می داد . بعد از مدتی دومی پیاده شد ، مبلغی که او پرداخت مساوی بود با پولی که اولی پرداخته بود (a_1 ریال) به اضافه ثلث مبلغی که تاکسی متر بعد از پیاده شدن اولی کار کرده بود : روی هم a_2 ریال . بعد مسافر سوم پیاده شد ، او به اندازه مبلغی که دومی داده بود (a_2 ریال) به اضافه نصف مبلغ اضافه کار تاکسی متر بعد از پیاده شدن دومی ، پرداخت : روی هم a_3 ریال . بالاخره مسافر چهارم پیاده شد ، او به اندازه پول سومی (a_3 ریال) به اضافه تمام مبلغی که تاکسی متر بعد از پیاده شدن سومی نشان داده بود ، پرداخت : روی هم a_4 ریال .

می خواهیم مسافتی را که تاکسی پیموده است پیدا کنیم، به شرطی که تاکسی متر موقع شروع کار ۱۰ ریال را نشان دهد و برای هر ۳۰۰ متر يك ریال به آن اضافه شود.

۱۸۳. قایق موتوری از نقطه A در جهت حرکت آب رودخانه، با سرعت اختصاصی ۱۲ کیلومتر در ساعت، حرکت کرد. در همان زمان قایق دیگری از نقطه B در خلاف جهت حرکت آب (سرعت جریان آب ۲ متر در ثانیه است) با سرعت اختصاصی ۳۰۰ متر در دقیقه حرکت کرد. این دو قایق در نقطه C ، که ۱۶ کیلومتری A بود، در ساعت ۱۶ و ۴۵ دقیقه به هم رسیدند. اگر سرعت جریان آب ۳ متر در ثانیه باشد، این دو قایق کی و کجا به هم می رسند؟

۱۸۴. سنگی از ارتفاع h سانتیمتری به صورت آزاد رها شده است. در همان زمان از سطح زمین، سنگ دیگری با سرعت اولیه v_0 سانتیمتر در ثانیه به طرف بالا پرتاب شده است. شتاب نیروی ثقل g سانتیمتر بر ثانیه است. کی این دو سنگ به هم می رسند؟

۱۸۵. ساعت ۱۲ و ۳۰ دقیقه، خانم سمیت به اطاق کاپیتان کشتی تفریحی، که به طرف بالای رودخانه می رفت، پرید:
- جواهرات مرا از اطاقم در کشتی به سرقت برده اند!
- بیشتر توضیح بفرمایید!

- در ساعت ۱۰ و ۳۰ دقیقه مستخدم، بعد از آنکه چند دقیقه در اطاق دوم من که جواهرات من در آنجاست ماند، برای من قهوه آورد. سپس در همان اطاق تا چند دقیقه به ۱۲ باقی ماند.
- در اطاق شما دیگر چه کسی بود؟

- دوست من خانم براون که برای پیلانو زدن پیش من آمده بود، ولی البته او خارج از هر سوءظنی است. در ساعت ۱۲ و ۵ دقیقه

مهماندار تمرین او را قطع کرد و از او خواهش کرد از اطاق خارج شود تا بتواند چراغ رومیزی را درست کند. در ساعت ۱۲ و ۱۰ دقیقه من سرزده به اطاقم برگشتم و دیدم که مهماندار اشیای مرا جستجو می کند. من شروع به سرزنش او کردم و این کار تا ساعت ۱۲ و ۲۵ دقیقه طول کشید، در این موقع دوست من دوباره برگشت. همان موقع هم من به سرقت پی بردم و پیش شما آمدم.

کاپیتان متوجه شد که مستخدم از ساعت ۱۲ و ۱۰ دقیقه تا ۱۲ و ۲۰ دقیقه در پستوی لباسها بوده است. ولی هیچکس نتوانست بگوید که او از ساعت ۱۲ تا ۱۲ و ۱۰ دقیقه و از ۱۲ و ۲۰ دقیقه تا ۱۲ و ۳۰ دقیقه کجا بوده است. از آنجا که کاپیتان نتوانست به نتیجه مشخصی برسد، در ساعت ۱۳ و ۳۰ دقیقه کشتی را به عقب برگرداند. در ساعت ۱۴ و ۴۵ دقیقه کشتی در مقابل جعبه ای قرار گرفت که روی آب شناور بود و خانم سمیت قوطی جواهرات خود را در داخل آن شناخت.

دیگر برای کاپیتان روشن شده بود که چه کسی جواهرات را به سرقت برده بود. چه کسی؟

۱۸۶. اتوبوسی بین دو نقطه A و B با سرعت ثابت در رفت و آمد است و فقط در هریک از این دو نقطه ۳ دقیقه توقف می کند. می دانیم: در ساعت ۹ و ۸ دقیقه اتوبوس از کنار نقطه C و به طرف B گذشته است.

در ساعت ۱۱ و ۲۸ دقیقه اتوبوس از نقطه A خارج شده است. در ساعت ۱۳ و ۱۶ دقیقه اتوبوس به نقطه B رسیده است.

در ساعت ۱۴ و ۴ دقیقه از نقطه C و به طرف B عبور کرده است. کارمند صندوق پس انداز، که در مسیر AB بود، در فاصله ۵۴

دقیقه ناهار در بالکون اطاق خود نشسته بود . در این فاصله اتوبوسی از جلو او عبور نکرد .

کارمند پست که ۲۰ دقیقه به خیابان آمده بود ، دوبار اتوبوس را دید .

نقطه C ، صندوق پست انداز و پستخانه در چه نقطه‌هایی از مسیر AB قرار دارند ؟

۱۸۷. دو نامه‌رسان یکی از A و دیگری از B به طرف یکدیگر در يك زمان حرکت کردند . سرعتهای آنها متفاوت ، ولی برای هر کدام یکنواخت بود . بعد از آنکه به یکدیگر رسیدند ، اولی ۱۶ ساعت و دومی ۹ ساعت دیگر تا مقصد فاصله داشتند . هر کدام از نامه‌رسانها برای پیمودن فاصله A و B چقدر وقت لازم دارند ؟

۱۸۸. عدد ۲۲ را به سه قسمت چنان تقسیم کنید که اگر به یکی از عددهایی که بدست می‌آید ۵/۵ اضافه و از دومی ۱/۵ را کم و سومی را در ۲/۵ ضرب کنیم ، سه عدد مساوی پیدا شود .

۱۸۹. دستگاه هفت معادله هفت مجهولی درجه اول زیر را حل کنید :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 11y + 21z + 31t + 41u + 51v + 61w = 77 \\ 2x + 12y + 22z + 32t + 42u + 52v + 62w = 84 \\ 3x + 13y + 23z + 33t + 43u + 53v + 63w = 91 \\ 4x + 14y + 24z + 34t + 44u + 54v + 64w = 98 \\ 5x + 15y + 25z + 35t + 45u + 55v + 65w = 105 \\ 6x + 16y + 26z + 36t + 46u + 56v + 66w = 112 \\ 7x + 17y + 27z + 37t + 47u + 57v + 67w = 119 \end{array} \right.$$

۱۹۰. سه دوندۀ A ، B و C در يك مسابقه دو ۱۰۰ یاردی شرکت کردند . وقتی که A به پایان خط رسید ، B در ۱۰ یاردی او بود و وقتی که B به پایان خط رسید ، C در ۱۰ یاردی او بود . وقتی که A به پایان خط رسید ، C در چند یاردی او واقع بود ؟

فرض را بر این می‌گیریم که هر سه با سرعت‌های یکنواخت می‌دویده‌اند.

۱۹۱. مسافری از ده خود به طرف ایستگاه راه‌آهن حرکت کرد. ساعت اول ۳ کیلومتر رفت، ولی حساب کرد که اگر با همین سرعت به راه خود ادامه دهد ۴۰ دقیقه به‌قطار دیر می‌رسد. بنابراین بقیه راه را با سرعت ۴ کیلومتر در ساعت حرکت کرد و ۴۵ دقیقه قبل از حرکت قطار به ایستگاه رسید. فاصله بین ایستگاه و قطار را پیدا کنید.

حل این مسئله به کمک جبر ساده است و جواب آن از معادله

$$\frac{x}{3} - \frac{2}{3} = 1 + \frac{x-3}{4} + \frac{3}{4}$$

بدست می‌آید. شما این مسئله را تنها به کمک حساب حل کنید.

۱۹۲. قایقی بدون پارو و موتور، از نقطه A به طرف نقطه B ، با جریان آب حرکت کرد. بعد از $2/4$ ساعت قایق موتوری (با سرعت اختصاصی ۲۰ کیلومتر در ساعت) به دنبال اولی به راه افتاد. به محض اینکه قایق موتوری به قایق اولی رسید به طرف A برگشت. $3/6$ ساعت بعد از شروع حرکت، قایق موتوری به نقطه A و قایق اول به نقطه B رسیدند. سرعت جریان آب را پیدا کنید.

۱۹۳. در یک حوض خالی بطور یکنواخت آب می‌ریزد (v لیتر در ثانیه). به محض اینکه مقداری آب وارد حوض شود، تبخیر آن شروع می‌شود؛ تبخیر آب هم یکنواخت است و بعد از m ثانیه از مقدار مفروض آب چیزی باقی نمی‌ماند. می‌خواهیم w ، مقدار لیتر آبی که بعد از t ثانیه در حوض می‌ماند پیدا کنیم.

برای حل مسئله به این ترتیب استدلال می‌کنیم. از یک طرف بعد از t ثانیه vt لیتر آب وارد حوض می‌شود. از طرف دیگر آب

تبخیر می‌شود. مقدار تبخیر آب در هر لحظه متناسب با مقدار آبی است که در آن لحظه در حوض وجود دارد. چون هر ثانیه v لیتر آب به حوض وارد می‌شود، متناسب با آن شدت تبخیر هم زیاد می‌شود، یعنی به شدت تبخیر هر ثانیه به اندازه $\frac{v}{m}$ لیتر در ثانیه اضافه می‌شود. به این ترتیب «نمو» تبخیر عبارت است از $\frac{v}{m}$ لیتر در ثانیه. این وضع کاملاً شبیه وضع حرکت متشابه‌التغییر است که به این ترتیب بیان می‌شود:

$$s = v.t + \frac{1}{2}a.t^2$$

که در آن s - مسافت،

t - زمان،

v - سرعت اولیه،

a - شتاب حرکت است.

برای مسئله ما، این رابطه را خواهیم داشت:

$$w = v.t - \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{m} \cdot t^2 \quad (\text{لیتر})$$

برای يك نمونه عددی این رابطه را بررسی کنیم. فرض کنید $v = 20$ (لیتر در ثانیه) و $m = 10$ (ثانیه) باشد، در این صورت داریم:

$$w = 20t - \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{10} \cdot t^2 = 20t - t^2$$

مقادیر مختلف را حساب کنیم:

$$t = 0 \dots 2 \dots 6 \quad (\text{ثانیه})$$

$$w = 0 \dots 36 \dots 84 \quad (\text{لیتر})$$

همانطور که می‌بینیم مقدار آب در حوض رو به افزایش است.

جدول را ادامه می دهیم :

$$t = \dots 8 \dots 10 \ 11 \text{ (ثانیه)}$$

$$w = \dots 96 \dots 100 \ 99 \text{ (لیتر)}$$

مقدار آب در حوض رو به کاهش می رود . بعد چه خواهد شد ؟

$$t = \dots 15 \dots 20 \text{ (ثانیه)}$$

$$w = \dots 75 \dots 0 \text{ (لیتر)}$$

بعد از ۲۰ ثانیه هیچ آبی در حوض نمی ماند ! ولی این نتیجه بی معنی است ! مگر نه این است که در هر ثانیه ۲۰ لیتر آب وارد حوض می شود ؟ اشتباه محاسبه در کجاست ؟

۱۹۴. a کناره بالای يك در، در دومتری زمین قرار دارد؛ در يك نقطه از آن سه مگس نشسته است. درست در ساعت ۴، هرسه مگس در سه جهت مختلف پرواز می کنند . در چه ساعتی این مگسها روی يك صفحه قرار می گیرند ؟

b در کنار حیاط، چوبی به ارتفاع دو متر وجود دارد؛ درست در ساعت ۳ از انتهای بالایی آن چهار مگس در جهتهای مختلف پریدند : هر کدام از آنها روی يك خط راست و با سرعت ثابت می پرید ، اولی با سرعت ۵۰ متر در دقیقه ، دومی ۶۰ متر در دقیقه ، سومی ۷۰ متر در دقیقه و چهارمی ۸۰ متر در دقیقه . بعد از ۹ دقیقه چهار مگس روی يك صفحه قرار داشتند . این چهار مگس کی دوباره روی يك صفحه قرار می گیرند ؟

۱۹۵. دو پاره خط داده شده است و می دانیم یکی از آنها قاعده و دیگری یکی از ساقهای مثلث متساوی الساقین است ؛ ولی نمی دانیم کداميك قاعده و کداميك ساق است . آیا با همین مفروضات می توان مثلث متساوی الساقین را ساخت ؟

۱۹۶. روی میزها را برای باغ کودکان به شکل دوزنقه متساوی الساقین



شکل ۱۲

می سازند، به نحوی که اگر آنها را چسبیده به هم قرار دهند، یک دایره (ویا دقیقتر یک حلقه) تشکیل دهند، ضمناً اگر میزها را یک در میان به اندازه ۱۸۰° درجه بچرخانند، در ردیف هم و

روی یک خط راست قرار گیرند. آیا ضلع آزاد میز آخر در این حالت (روی شکل ۱۲ ضلع میز سمت راست) می تواند موازی ضلع آزاد میزاول (روی شکل سمت چپ) باشد؟

۱۹۷. مکعبی که از آلیاژی با وزن مخصوص $۲/۴$ تهیه شده است

$۴۱\frac{۲}{۳}$ گرم وزن دارد. مکعب دیگری از آلیاژی دیگر به وزن

مخصوص $۴/۶$ درست کرده ایم و می دانیم که سطح کره محیطی

مکعب دوم ۴ برابر سطح کره محیطی مکعب اول است. وزن

مکعب دوم چقدر است؟

۱۹۸. (a) سه نقطه A ، B و C مفروض است. دوزنقه متساوی الساقینی

رسم کنید که این سه نقطه، سه رأس آن باشد.

(b) سه نقطه D_1 ، D_2 و D_3 مفروض است. سه دوزنقه متساوی-

الساقین بسازید که در سه رأس A ، B و C (که پیدا خواهید کرد)

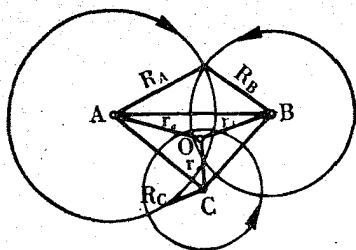
مشترك باشند و D_1 ، D_2 و D_3 به ترتیب رأس چهارم آنها باشد.

۱۹۹. (a) سه صفحه دایره ای شکل دور سه محور متوازی A ، B و C

بطور یکنواخت دوران می کنند (جهت دوران روی شکل ۱۳ نشان

داده شده است). قبل از شروع دوران، سوراخ O را در سه صفحه

به وجود آورده اند. می دانیم:



شکل ۱۳

$$AB = ۵۳ \text{ (میلیمتر) ,}$$

$$BC = ۳۴ \text{ (میلیمتر) ,}$$

$$CA = ۴۰ \text{ (میلیمتر) ,}$$

$$r_a = ۳۲ \text{ (میلیمتر) ,}$$

$$r_b = ۴۵ \text{ (میلیمتر) ,}$$

$$M_A = ۷/۵ \text{ (دور در دقیقه) ,}$$

$$w_b = ۱۰ \text{ (دور در دقیقه) و } w_c = ۶\frac{۲}{۳} \text{ (دور در دقیقه)}$$

بعد از چه مدتی دوباره سوراخهای سه صفحه روی هم قرار می گیرند ؟

(b) دو صفحه دایره ای شکل بطور یکنواخت دور دو محور متوازی A و B دوران می کنند. سرعت دوران اولی (w_A) ۵ دور در دقیقه و سرعت دوران دومی (w_B) ۱۲ دور در دقیقه است. قبل از شروع دوران سوراخ O را در جایی از دو صفحه به وجود آورده اند. بعد از چه مدتی دوباره سوراخ دیده می شود ؟

۲۰۰. چهار ضلعی ABCD مفروض است. می خواهیم این چهار ضلعی را به چهار قسمت چنان تقسیم کنیم که بتوانیم از آنها چهار ضلعی KLMN را هم ارز چهار ضلعی ABCD با معلوم بودن دو جزء آن (مثلاً دو ضلع، یا دو زاویه، یا یک ضلع و یک زاویه) بسازیم.



شکل ۱۴



۲۰۱. در یک کتاب، شکل ۱۴ داده

شده است. در این شکل دو

ستون قائم و سایه آنها روی

صفحه افقی رسم شده است. با این فرض می خواهیم : (۱) جای منبع نور (لامپ، چراغ) ، (۲) «پایه» آن (یعنی تصویر منبع نور روی صفحه افقی) را پیدا کنیم.

این مسأله را حل کنید و به این پرسشهای اضافی هم جواب بدهید:

(۱) آیا قائم بودن ستونها مهم است ؟

(۲) آیا افقی بودن صفحه‌ای که سایه روی آن می‌افتد ، اساسی است ؟

(۳) آیا همه آنچه که در شکل داده شده است لازم است ؟

۲۰۲. مخروط قائم مستدیری روی يك صفحه افقی قرار گرفته است ،

به نحوی که در مولد SA بر صفحه مماس است . مخروط بدون

لغزش روی صفحه به اندازه 360° درجه ، دور رأس خود S ،

می‌گردد و در وضع اولیه خود قرار می‌گیرد . این مخروط چگونه

باید باشد تا مولد SA هم در وضع اولیه خود قرار گیرد ؟

۲۰۳. دو دایره با اندازه‌های دلخواه در نقطه

M برهم مماس اند . از نقطه M قاطع

دلخواه AMB را کشیده‌ایم (A و B

روی محیط دو دایره اند) . ثابت کنید

مماسهایی که بر دو دایره در نقطه‌های A و

B رسم می‌کنیم با هم موازی اند (شکل

(۱۵) .

۲۰۴. مؤده از رأسهای مربع $ABCD$ چهار خط راست به موازات قطرهای

آن رسم کرد و مربع محیطی را بدست آورد . بعد از اندازه‌گیری

و محاسبه گفت :

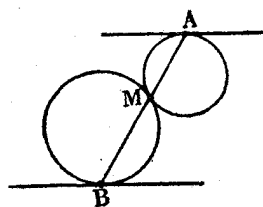
عددی که مساحت مربع $ABCD$ را نشان می‌دهد برابر است با

عددی که محیط مربع محیطی را نشان می‌دهد !

خواهر او توکا ، وسط ضلعهای همان مربع $ABCD$ را به هم وصل

کرد و مربع محاطی را بدست آورد . بعد از اندازه‌گیری و محاسبه

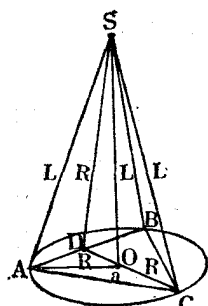
گفت :



شکل ۱۵

عددی که مساحت مربع $ABCD$ را نشان می‌دهد برابر است با
عددی که محیط مربع محاطی را نشان می‌دهد !

چطور چنین چیزی ممکن است ؟ در هر دو حالت مربع $ABCD$
یکی است ، بنابراین مساحت آن تغییر نمی‌کند ، در حالی که
مربعهای محیطی و محاطی با هم فرق دارند و محیط مربع محیطی
دو برابر محیط مربع محاطی است . چطور دو مقدار نامساوی با
يك مقدار، مساوی شده‌اند؟ مطلب را چگونه می‌توان روشن کرد؟
حلقه‌ای به شعاع مساوی R به وسیله سه نخ SA ، SB و SC به
قلاب S آویخته شده است $(\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CA})$. اگر این سه نخ به يك



شکل ۱۶

طول باشند $(SA = SB = SC = L)$ ،
صفحه حلقه افقی خواهد بود . ولی
اگر این سه طول برابر نباشند مثلاً
 $(SA = SB = L \neq SC = l)$ ، صفحه
حلقه افقی نخواهد بود .

اگر R و L معلوم باشد، حدود تغییرات
 l چیست ؟ اگر $l \neq L$ باشد ، صفحه
حلقه چه زاویه‌ای با صفحه افقی
می‌سازد ؟

آیا R و L را می‌توان به دلخواه اختیار کرد یا بین آنها ارتباطی
وجود دارد ؟ اگر جواب مثبت است ، این ارتباط را پیدا کنید
(شکل ۱۶) .

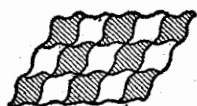
۲۰۶. قوطی مکعب مستطیل شکل درازی، به مقطع $a \times b$ مفروض است.
نخی به طول $2(a+b)$ از وسط دور قوطی پیچیده‌ایم ، به نحوی
که پاره خطهای راستی که به وسیله نخ به وجود آمده بر یالهای
قوطی عمود باشد . نقطه‌های مشترك نخ و یالهای مکعب مستطیل

را A_0 ، B_0 ، C_0 و D_0 می‌نامیم؛ یکی از این نقطه‌ها و مثلاً A_0 را ثابت می‌گیریم، نخ دیگری با طول بزرگتر (و مثلاً به طول l) انتخاب می‌کنیم؛ این نخ را می‌توان دور سطح قوطی پیچید، به نحوی که خط شکسته A_0BCDA_0 بدست آید که دیگر پاره خطهای آن عمود بر یالهای مکعب مستطیل نیستند.

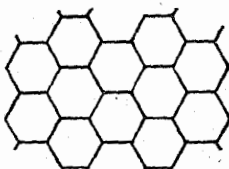
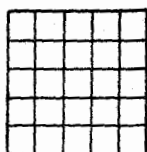
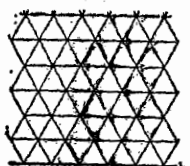
(۱) حداکثر فاصله نقطه B از B_0 چقدر است؟ همچنین C از C_0 و D از D_0 ؟

(۲) ثابت کنید خط شکسته $A_0B'CD'A_0$ که به این ترتیب بدست می‌آید، مسطح است.

۲۰۷. در شکل ۱۷ کف پوشهای چوبی نشان



داده شده است که با شکلهای مساوی تمام سطح را پوشانده‌اند (بدون اینکه جایی خالی بماند و یا کف پوشها روی هم



شکل ۱۷

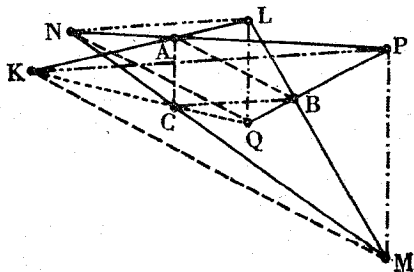
قرار گرفته باشند). روشن است که هر جزء کف پوش را می‌توان با حرکت انتقالی به هر جزء دلخواه دیگری از همین کف پوش منطبق کرد. مبنای اصلی همه کف پوشها یکی از این دو طرح است: (۱) متوازی‌الاضلاعها (و در حالت خاص مستطیل و مربع)، (۲) شش ضلعیها با ضلعهای متوازی (و در حالت خاص شش ضلعیهای منتظم). همچنین روشن است که کف پوش را با مثلثهای غیر مشخص هم می‌توان ساخت.

به این ترتیب از شکلهای منتظم تنها با مثلشهای متساوی الاضلاع، مربعها و شش ضلعیهای منتظم می توان کفها را فرش کرد. این مثلثها (یا مربعها و یا شش ضلعیها) را طوری از هم جدا می کنیم که بین شکلهای نوارهایی به عرض d به وجود آید. عرض نوارهای d را چقدر بگیریم که مثلثهای منتظم (یا مربعها و یا شش ضلعیهای منتظم) به اندازه $\frac{1}{n}$ تمام سطح کف را پوشانده باشند؟

۲۰۸. رومیزی مربع شکلی از پارچه نازک، روی میز دایره ای شکل قرار دارد. مرکز مربع بر مرکز دایره منطبق است. رأسهای هر مربع رومیزی نسبت به وسط ضلعهای آن چقدر به کف اطاق نزدیکتر است؟

۲۰۹. a سه نقطه دلخواه C ، B و A را که بر یک امتداد نیستند، روی یک صفحه انتخاب کرده ایم؛ در همین صفحه نقطه دلخواه K را در نظر می گیریم و نقطه L قرینه K را نسبت به A پیدا می کنیم؛ سپس M قرینه L را نسبت به B را بدست می آوریم؛ بعد نقطه N قرینه M را نسبت به C و نقطه P قرینه N را نسبت به A پیدا می کنیم. بالاخره نقطه Q قرینه P نسبت به B را بدست می آوریم.

ثابت کنید نقطه های Q و K نسبت به نقطه C قرینه یکدیگرند.
(b) ثابت کنید می توان همین نتیجه را در حالت کلی تر هم بدست آورد، وقتی که برای



شکل ۱۸

بدست آوردن هریک از نقطه‌های قرینه ردیف فرد (یعنی نقطه‌های اول، سوم و پنجم: L ، N و Q) فاصله نقطه مبدأ تا مرکز تقارن φ برابر $(\varphi > 1)$ فاصله مرکز تقارن تا نقطه قرینه بگیریم و برای نقطه‌های قرینه ردیف زوج (یعنی نقطه‌های دوم، چهارم و ششم: M ، P و K) فاصله نقطه قرینه تا مرکز تقارن را α برابر فاصله نقطه اصلی تا مرکز تقارن فرض کنیم، یعنی:

$$\frac{KA}{AL} = \frac{MC}{CN} = \frac{PB}{BQ} = \varphi, \quad \frac{LB}{BM} = \frac{NA}{AP} = \frac{1}{\varphi}$$

در این حالت باید $\frac{QC}{CK} = \frac{1}{\varphi}$ باشد (شکل ۱۸ را ببینید).

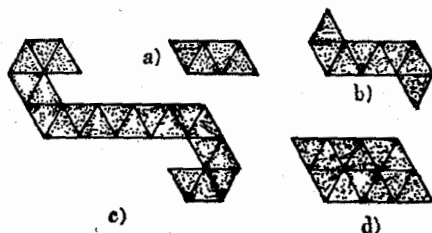
۲۱۰. پارامترهایی که شکل و اندازه‌های لیوان تاشو را معین می‌کند چند و کدامند؟ (شبیه آن می‌توان از آنتن تاشو رادیوهای دستی نام برد.)

۲۱۱. نقطه‌های A ، B و C روی سه یالی که در رأس O مکعبی به هم

رسیده‌اند، قرار دارند و می‌دانیم $OA = OB = OC = a$ (اگر یال مکعب مساوی l باشد: $l > a$). از هریک از نقطه‌های A و B که روی یکی از وجه‌های مکعب قرار دارند، صفحه‌ای عمود بر این وجه و موازی OO' (قطر مکعب) عبور می‌دهیم. به همین ترتیب دو صفحه از نقطه‌های B و C و دو صفحه از نقطه‌های C و A . در نتیجه سه جفت صفحه متوازی مکعب را قطع می‌کند.

شکل چند وجهی که بدست می‌آید و حجم آنرا پیدا کنید.

۲۱۲. در شکل ۱۹ - a يك



شکل ۱۹

چند ضلعی نشان داده شده است که از ۴ مثلث متساوی الاضلاع درست شده است: این گسترده يك چهار وجهی منتظم

است. در شکل ۱۹- b يك چند ضلعی وجود دارد كه از هشت مثلث متساوی الاضلاع درست شده است: این گسترده يك هشت وجهی منتظم است. در شکل ۱۹- c بیست مثلث متساوی الاضلاع يك چند ضلعی را به وجود آورده اند. این گسترده يك بیست وجهی منتظم است. در شکل ۱۹- d چند ضلعی وجود دارد كه از دوازده مثلث متساوی الاضلاع درست شده است. این هم گسترده يك چند وجهی است، كه البته به اندازه چهار وجهی، هشت وجهی و بیست وجهی منتظم مشهور نشده است. شكل گسترده را روی يك صفحه كاغذ رسم كنید، سپس آنرا ببرید و كوشش كنید چند وجهی مربوطه را بسازید.

۲۱۳. يك تیر چوبی را اره كنید (جهت برش با محور چوب می تواند زاویه ای دلخواه داشته باشد). در سطح برش قشرهایی را می بینید كه سالمهای عمر درخت را نشان می دهند. به زبان هندسه، این قشرها چه منحنیهایی را تشكيل می دهند؟

۲۱۴. a مجموع حجم سه متوازی السطوح برابر است با v . مطلوب است حجم هريك از سه متوازی السطوح به شرطی كه بدانیم:

نسبت طول آنها به يكديگر $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ است،

نسبت عرض آنها به يكديگر $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3$ است،

نسبت ارتفاع آنها به يكديگر $\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3$ است.

b همین مسأله را برای حالتی حل كنید كه داشته باشیم:

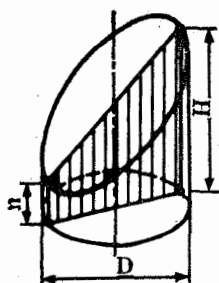
$$نسبت طولها : a : b : c$$

$$نسبت عرضها : b : c : a$$

$$نسبت ارتفاعها : c : a : b$$

۲۱۵. يك چهار ضلعی محدب به صورت کلی خود در نظر می گیریم (یعنی چهار ضلعی كه ضلعهای آن طولهای مختلفی داشته باشند).

فرض کنید ضلعهای آن a, b, c, d میله‌هایی باشند که در رأسهای چهار ضلعی به هم لولا شده‌اند. این چهار ضلعی را می‌توان با حفظ اندازه ضلعهای آن تغییر شکل داد. می‌خواهیم مجموعه این چهار ضلعیها را که می‌توان به کمک «چهار ضلعی» لولایی بدست آورد، بررسی کنیم.



شکل ۲۰

۲۱۶. استوانه قائم دواری با قطر قاعده مساوی

D مفروض است. از نقطه‌ای واقع بر محور استوانه، صفحه دلخواهی گذرانده‌ایم تا يك استوانه ناقص بدست آید. مولدهای اصلی این استوانه ناقص مساوی H و h شده است. اگر سطح جانبی این استوانه ناقص را روی صفحه گسترش دهیم، چه شکلی بدست می‌آید؟

مساحت این شکل را محاسبه کنید (شکل ۲۰).

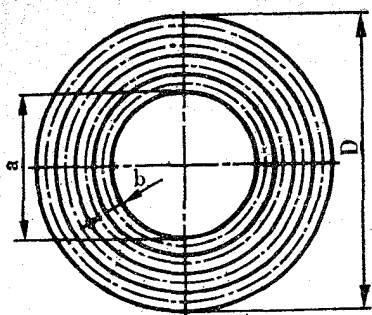
۲۱۷. يك صفحه کاغذ انتخاب کنید و آنرا از وسط روی ضلع بزرگتر

تا کنید. سپس دوباره آنرا به همین ترتیب تا کنید و غیره. در هر عمل طول ضلع کوچکتر ثابت می‌ماند و طول ضلع بزرگتر نصف می‌شود.

شکل صفحه کاغذ چگونه باشد تا نصف آن، يك چهارم آن، يك هشتم آن، يك شانزدهم آن و غیره شکلهایی متشابه باشند؟

۲۱۸. دور يك میله (استوانه) به قطر مساوی d نواری را n دور (n عددی صحیح است) محکم پیچیده‌ایم. قطر خارجی لوله‌ای که

بدست می‌آید مساوی D شده است. می‌دانیم که اگر لوله را روی امتداد شعاع، از ابتدا تا انتهای نوار، ببریم، نوار به n قطعه تقسیم می‌شود که طول آنها تشکیل يك تصاعد حسابی می‌دهند،



شکل ۲۱

هريك از n قطعه را چگونه
به دو قسمت تقسیم کنیم تا
طول $2n$ قطعه‌ای که بدست
می‌آید يك تصاعد حسابی
جدید درست کنند ؟
برای سهولت کار قبول می
کنیم که هر دور (پیچ) نوار
يك حلقه درست کند (یعنی

يك استوانه دوار کامل) ، و طول گسترده آن مساوی قطر متوسط
آن باشد (شکل ۲۱) .

۲۱۹. a) يك ضلع مستطیلی a واحد و ضلع دیگر آن b واحد است a)
و b عددهای صحیحی هستند) . از انتهای هر پاره خط واحد
خطی به موازات ضلع مستطیل رسم کرده‌ایم . به این ترتیب
مستطیل مفروض به ab مربع واحد تقسیم می‌شود. روی هم از دو
دستگاه خطهای موازی چند مربع درست می‌شود ؟
 b) همین مسأله را برای وقتی که مکعب مستطیل به بعدهای a ،
 b و c را به مکعبهایی تقسیم می‌کنیم ، حل کنید .

c) همین مسأله را برای متوازی‌السطوح n بعدی که بعدهای آن
به طولهای a ، b ، c ، h ، l و m هستند ، حل کنید .

۲۲۰. a) در يك مثلث متساوی‌الساقین دایره‌ای محاط کرده‌ایم ، سپس
دایره دومی رسم کرده‌ایم که بر دایره اول و دو ساق مثلث مماس
باشد ، بعد دایره سوم را و غیره .

مساحت هر دایره محاطی از مساحت دایره محاطی قبل از خود
کمتر است . بنابراین مساحت‌های این دایره‌ها يك رشته عددی
نزولی تشکیل می‌دهند. حد مجموع جمله‌های این رشته «مجموع

مساحت‌های همه دایره‌های محاطی» نامیده می‌شود. می‌خواهیم دایره‌ای پیدا کنیم که مساحت آن مساوی مجموع مساحت‌های همه دایره‌های محاطی باشد. مسأله را هم به طریق محاسبه و هم به طریق ترسیم حل کنید.

(b) در يك مثلث متساوی‌الساقین دایره‌ای محاط کرده‌ایم، سپس دایره دوم و بعد دایره سوم و غیره. فرض کنید قاعده این مثلث ثابت و ارتفاع آن متغیر باشد. آیا در این صورت نسبت مجموع مساحت‌های همه دایره‌های محاطی به مساحت مثلث تغییر می‌کند؟ اگر جواب مثبت است، در چه حالتی این نسبت نزولی است؟ به این سؤال بدون هیچ محاسبه‌ای و بدون استفاده از رابطه‌هایی که در قسمت قبل پیدا کرده‌اید جواب بدهید.

(c) در مخروط دوار قائمی يك کره محاط کرده‌ایم (قطر قاعده مخروط d و ارتفاع آن H است). سپس کره دیگری در مخروط محاط کرده‌ایم که بر کره اول و همه مولدهای مخروط مماس باشد و غیره. حجم هر يك از این کره‌ها از حجم کره قبلی کمتر است. بنابراین حجم این کره‌ها يك رشته عددی نزولی تشکیل می‌دهند. حدی که مجموع حجم‌های این کره‌ها به سمت آن میل می‌کند «مجموع حجم‌های کره‌های محاطی» نامیده می‌شود.

می‌خواهیم شعاع کره‌ای را پیدا کنیم که حجم آن مساوی مجموع حجم‌های کره‌های محاطی باشد.

۲۲۱. (a) دایره‌ای انتخاب می‌کنیم و آنرا «هسته» می‌نامیم. دور این «هسته» کمربندی از دایره‌هایی با همان قطر دایره «هسته» قرار می‌دهیم، به نحوی که هر يك از این دایره‌ها بر «هسته» و دو دایره مجاور کمربند مماس باشد. به همین ترتیب کمربند دوم را با دایره‌هایی به همان قطر قرار می‌دهیم و غیره.

اگر n کمربند درست کرده باشیم ، روی هم چند دایره در تمام شکل وجود خواهد داشت ؟

(b) همین مسئله را برای حالتی حل کنید که به عنوان هسته سه دایره مساوی انتخاب کرده باشیم که هر کدام از آنها بر دو دایره دیگر مماس باشد . در این حالت چه رابطه‌ای بدست می‌آید ؟

۲۲۲. کسرهای زیر را به ترتیب صعودی بنویسید :

$$\frac{601}{787}, \frac{509}{653}, \frac{457}{613}, \frac{360}{491}, \frac{321}{449}, \frac{53}{67}, \frac{4}{5}$$

۲۲۳. من شیر برنجی‌ام ، دو جریان آب از چشمه‌هایم ، يك جریان از دهانم و يك جریان از دماغ بیرون می‌آید . چشم راست من ، حوض را در دو روز پر می‌کند ؛ چشم چپ من در سه روز ، دماغ در چهار روز و دهان در شش روز حوض را پر می‌کند . اگر با هم تمام چشمه‌ها ، دهان و دماغ من باز باشد ، در چند ساعت حوض پر می‌شود؟ (مسئله یونانی). مسئله را با روش ترسیم حل کنید .

۲۲۴. از نقطه A در فاصله‌های زمانی مساوی سه اتومبیل در يك راه به طرف نقطه C حرکت کردند . بعد از مدتی هر سه اتومبیل با هم از نقطه B ، که بین A و C واقع بود ، گذشتند ، اتومبیل اول يك ساعت بعد از اتومبیل دوم به نقطه C رسید . اتومبیل سوم بعد از آنکه به C رسید بلافاصله برگشت و در ۴۰ کیلومتری نقطه C به اتومبیل اول رسید . سرعت اتومبیل اول را پیدا کنید ، به شرطی که فاصله B تا C مساوی ۱۲۰ کیلومتر باشد . کوشش کنید این مساله را مثل يك مسئله حساب حل کنید .

۲۲۵. (a) دو دوچرخه سوار در يك لحظه از نقطه‌های A و B به طرف یکدیگر حرکت کردند . هر کدام از آنها وقتی که به نقطه مقابل

رسید ، بلافاصله به طرف مبدا خود برگشت. اولین ملاقات آنها در ۵ کیلومتری A و دومین ملاقات آنها در ۳ کیلومتری B بود. فاصله AB را پیدا کنید .

(b) شرطهای مسأله را به همان ترتیب می گیریم، منتهی فرض می-کنیم دو چرخه سوارها حرکت بین A و B را همچنان ادامه دهند، در این صورت به این سؤالها هم جواب بدهید :

- (۱) ملاقات سوم ، چهارم و غیره کی پیش می آید ؟
- (۲) آیا ممکن است یکی از دو چرخه سوارها وقتی که از A به B (یا از B به A) می رود ، دیگری را دوبار ملاقات کند ؟
- (۳) آیا ممکن است یکی از دو چرخه سوارها وقتی از A به B (یا از B به A) می رود حتی یکبار هم دیگری را ملاقات نکند ؟

۲۲۶. دو نفر مبلغهای مساوی به صندوق پس انداز سپردند . اولی بعد از m ماه p ریال و دومی بعد از n ماه q ریال سپرده خود را گرفتند . هر کدام در ابتدا چه مبلغی به صندوق پس انداز سپرده بودند و نرخ بهره صندوق پس انداز چقدر است ؟ مسأله را با روش ترسیم حل کنید .

۲۲۷. در يك چمنزار به مساحت $3\frac{1}{3}$ آكر ۱۲ گاو به چرا مشغول شدند. ضمن ۴ هفته آنها تمام علفهایی را که در چمنزار بود و آنچه که در این مدت ، علفها رشد کرده بودند ، خوردند . در چمنزار دیگری به مساحت ۱۰ آكر ۲۱ گاو رها شدند . آنها در ۹ هفته تمام علفها به اضافه آنچه را که در این مدت رشد کرده بود ، خوردند . چند گاو می توان در چمنزاری به مساحت ۲۴ آكر رها کرد تا بتوانند ۱۸ هفته در آن چرا کنند ؟ (مسأله نیوتون) .

۲۲۸. از دو نقطه A و B ، که در کنار رودخانه ای قرار دارند ، دو قایق

موتوری با سرعتهای اختصاصی مساوی به طرف هم حرکت کردند. اگر قایق اول سرعت خود را x کیلومتر در ساعت بیشتر می کرد و قایق دوم به همین اندازه سرعت خود را کم می کرد، قایق اول همانقدر ساعت زودتر به B می رسید که قایق دوم دیرتر به A می رسید. اگر سرعت جریان آب را یکنواخت فرض کنیم، x را پیدا کنید.

۲۲۹. تعداد سالهای عمر پدری ۵ واحد بیشتر از مجموع سالهای عمر سه پسر اوست. بعد از ده سال، سن پدر دو برابر سن پسر بزرگتر خود می شود، بعد از بیست سال سن پدر دو برابر سن پسر دوم خواهد شد و بالاخره بعد از سی سال سن پدر دو برابر سن پسر کوچکتر خود می شود. سن پدر و هر یک از سه فرزندش چقدر است؟

۲۳۰. خریداری می خواهد ۱۲ تن از محصولی که در سه دهستان وجود دارد، بخرد و آنها را به شهر بیاورد؛ این خریدار اتومبیلی را برای ۴۰ ساعت در اختیار دارد و می دانیم:

دهستان	مقدار محصول (بر حسب تن)	قیمت محصول (به هزار تومان برای هر تن)	زمان دسترسی به محصول (به ساعت برای هر تن)
I	۱۰	۴	۱
II	۸	۳	۴
III	۶	۱	۳

چگونه خرید محصول را بین سه دهستان تقسیم کنیم، تا حداقل

پول پرداخت شود ؟

۲۳۱. چهار نفر می‌خواهند از A به B ، که $۳۹/۶$ کیلومتر راه دارد ، بروند . آنها اتومبیلی را کرایه کردند که می‌توانست با سرعت ۳۶ کیلومتر در ساعت حرکت کند. در این اتومبیل، بجز راننده، تنها دو نفر می‌توانست سوار شود . دو نفر از مسافرها جوان بودند و می‌توانستند ساعتی ۶ کیلومتر راه بروند؛ دو نفر دیگر، که مسن‌تر بودند ، تنها ساعتی ۴ کیلومتر می‌توانستند پیاده‌روی کنند . اتومبیل دو نفر مسن‌تر را سوار کرد و آنها را در نقطه M که در راه A و B قرار داشت ، پیاده کرد ، تا بقیه راه را به طرف B پیاده بروند . سپس اتومبیل بلافاصله برگشت و در نقطه P به دو نفر جوان‌تر رسید ، آنها را سوار کرد و به شهر A برد . اگر هر چهار نفر از شهر A با هم حرکت کرده باشند و با هم به شهر B رسیده باشند ، جای نقطه‌های M و P را معین کنید .

۲۳۲. دهقانی به بازار می‌رفت که مرغهای خود را بفروشد . در راه به امپراطور برخورد کرد . امپراطور از دهقان پرسید، قیمت کالای تو چند است . دهقان جواب داد :

- هر خروس پنج پشیز، هر مرغ سه پشیز و هر سه جوجه يك پشیز می‌ارزد .

امپراطور فکری کرد و دستور داد :

- فردا روی هم صد خروس و مرغ و جوجه برای من بیاور ، منتهی از هر نوع به تعدادی باید انتخاب کنی که همه روی هم درست صد پشیز قیمت داشته باشند . اگر دستور مرا درست انجام ندهی سرت را به باد خواهی داد .

دهقان ناراحت و دلوپس به خانه برگشت . پسر هیجده ساله

دهقان ، وقتی که ماجرا را شنید ، گفت :

- پدر نگران نباش ، و به سرعت مسأله را حل کرد .

روز بعد دهقان نزد امپراطور رفت . امپراطور از اینکه دهقان

مسأله را حل کرده بود ، خشمگین شد و به او دستور داد :

- فردا هم دوباره صد پرنده برای من بیاور ، تعداد هر نوع از آنها باید با امروز فرق داشته باشد ، ولی روی هم باز هم صد پیشیز قیمت داشته باشد .

پسر دوباره به پدر کمک کرد .

وقتی که دهقان ، دستور دوم امپراطور را هم انجام داد ، امپراطور با خشم زیاد برای سومین بار از او خواست که صد خروس ، مرغ و جوجه برای او بیاورد که صد پیشیز قیمت داشته باشند ، ولی تعداد هر کدام از آنها با دو روز قبل فرق داشته باشد .

دهقان برای بار سوم ، به کمک پسرش ، دستور امپراطور را انجام داد .

تعداد خروس ، مرغ و جوجه را که دهقان هر بار برای امپراطور برده است ، پیدا کنید (يك مسأله قدیمی) .

۲۳۳. (a) سه جسم در يك جهت و از يك نقطه با سرعتهای ۴، ۵ و ۶ سانتیمتر در ثانیه حرکت کرده اند . جسم دوم ، حرکت خود را دو ساعت بعد از اولی شروع کرد . چه مدت بعد از حرکت دومی ، جسم سوم شروع به حرکت کند تا همراه جسم دوم به اولی برسد ؟ مسأله را به کمک شکل حل کنید .

(b) از نقطه A در يك جهت و در يك زمان ، دو جسم شروع به حرکت کردند . اولی با سرعت $۳\frac{۷}{۹}$ متر در دقیقه و دومی با سرعتی کمتر از آن ؛ هر دو جسم حرکت متشابه التغییر دارند ؛ شتاب

دومی $9\frac{3}{7}$ متر در دقیقه . بعد از ۱ ساعت و ۳۷ دقیقه و ۳۹ ثانیه ،

متحرك دوم به اولی می رسد . ضمناً می دانیم در لحظه ای که سرعت جسمها مساوی می شود ، فاصله بین آنها ۳۷۹ متر است .

بعد از چه مدتی جسم دوم ۱۱۳۷ متر از اولی جلو می افتد ؟

۲۳۴ . قطار فاصله بین شهر A و شهر B را در ۱۰ ساعت و ۴۰ دقیقه

طی می کند . اگر سرعت قطار ۱۰ کیلومتر در ساعت کمتر باشد ،

۲ ساعت و ۸ دقیقه دیرتر به B می رسد . مطلوب است فاصله بین دو

شهر و سرعت قطار .

۲۳۵ . (a) در سه ظرف ، يك نوع مایع ولی بطور نامساوی قرار دارد .

اگر نیمی از مایع ظرف اول (از لحاظ حجم) را برداریم و بطور

مساوی در دو ظرف دیگر بریزیم ، سپس نیمی از مایع ظرف دوم

را بطور مساوی در دو ظرف دیگر بریزیم و بالاخره نیمی از مایع

ظرف سوم را بطور مساوی در دو ظرف دیگر بریزیم ، در هر ظرف

۱۶ لیتر مایع خواهد بود . در هر ظرف چند لیتر مایع در ابتدا بوده

است ؟

(b) پنج راهزن از سبد يك رهگذر تعدادی سکه طلا دزدیدند .

قویترین آنها ۸۱ سکه برداشت و بقیه سکه ها را بطور نامساوی

بین چهار نفر دیگر تقسیم کرد . به خاطر تقسیم نامناسب بین آنها

اختلاف به وجود آمد ، تا اینکه سرکرده آنها دستور داد آنکه

بیش از همه سکه طلا دارد ، سکه های چهار نفر دیگر را دو برابر

کند ، سپس دومین نفر ، که تعداد سکه هایش نسبت به بقیه

زیادتر است ، سکه های چهار نفر دیگر را دو برابر کند ؛ بعد از

او نفر سوم و بعد چهارم و بالاخره نفر پنجم به همین ترتیب عمل

کنند . در نتیجه معلوم شد که سکه های هر پنج راهزن مساوی

شده است . مطلوب است تعداد سکه‌هایی که در سبد بوده است و سهم اولیه هریک از پنج راهزن .

۲۳۶. يك نفر از نقطه A با سرعت معینی به طرف نقطه B حرکت کرد ؛ وقتی که نصف راه را طی کرد ، سرعت خود را دو برابر کرد و به B رسید .

دفعه دوم نیمی از کل زمانی که در راه بود با همان سرعت اولیه رفت و نیم دوم زمان را با سرعت دو برابر .

روشن است که دفعه دوم ، نسبت به دفعه اول ، راه بیشتری با سرعت دو برابر رفته است و بنابراین وقت کمتری صرف کرده است . چقدر وقت کمتر صرف کرده است ؟

۲۳۷. از نقطه A هر ساعت يك قايق به طرف بالا در خلاف جهت جریان آب ، حرکت می‌کند ؛ همزمان با آنها ، از نقطه B به طرف پایین در جهت جریان آب ، قایقهایی حرکت می‌کنند. تعداد ساعتیایی که در هر جهت طول می‌کشد تا قایقی از A به B یا از B به A برسد ، با عدد صحیح بیان می‌شود ، هر قایقی که در خلاف جهت آب حرکت می‌کند ، تا رسیدن به B با هفت قایقی که از B حرکت کرده‌اند ، برخورد می‌کند (دو قایقی را که در نقطه‌های A و B ملاقات می‌کند ، به حساب نیاورده‌ایم) . می‌خواهیم ببینیم ، قایقی که در جهت جریان آب از B به A می‌رسد ، در راه با چند قایق برخورد می‌کند ، به شرطی که بدانیم سرعت قایق در آب ساکن دو برابر سرعت جریان آب است .

۲۳۸. از نقطه O در يك زمان در جهت جریان آب رودخانه يك قايق و

يك كلك*، حرکت کردند. بعد از آنکه قایق $\frac{1}{3}$ کیلومتر به پیش

(*) قایق گونه‌ای که از چوب و تنی می‌سازند و به آب می‌اندازند و در جهت جریان آب رودخانه کالایی را اجابجا می‌کنند. طبیعی است که كلك با همان سرعت جریان آب حرکت می‌کند.

رفت، برگشت و بعد از آنکه $\frac{1}{3}$ کیلومتر دیگر در خلاف جهت جریان آب حرکت کرد، به كلك رسید. سرعت اختصاصی قایق چقدر بوده است، به شرطی که سرعت جریان آب ۴ کیلو متر در ساعت است.

۲۳۹. کسی که از جلو يك سینما رد می‌شد، توانست ساعت‌های شروع چهار شانس (و نه دقیقه‌های آنرا) ببیند:

شانس اول : ساعت ۱۲ و . . . دقیقه

شانس دوم : ساعت ۱۳ و . . . دقیقه

.

شانس هفتم : ساعت ۲۳ و . . . دقیقه

شانس هشتم : ساعت ۲۴ و . . . دقیقه

با همین معلومات می‌خواهیم ساعت دقیق شروع هريك از هشت شانس را پیدا کنیم.

فرض می‌کنیم که:

(۱) فاصله زمانی بین شروع هر دو شانس متوالی (یعنی مدتی که يك شانس و تنفس بعد از آن طول می‌کشد)، مقدار ثابتی است.

(۲) هر شانس می‌تواند در ساعت n و m دقیقه شروع شود، که در آن m و n عددهایی صحیح‌اند.

۲۴۰. دودانش آموز برای صرف ناهار به رستوران رفتند. آنها پالتوهای خود را به محافظ سپردند و دوشماره دریافت کردند. دانش آموز اول هر دو شماره را در جیب خود گذاشت. در پایان ناهار دانش آموز سوم که در رشته ریاضی تحصیل می‌کرد، به آنها پیوست، یکدفعه دانش آموز دوم متوجه شد که موقع کلاسش رسیده است.

و از دانش آموز اول خواست ، شماره پالتو او را بدهد ، ولی دانش آموز اول نمی دانست کدام شماره متعلق به دوستش است ، هردو شماره را به او داد و گفت پالتو خودت را بگیر و شماره مرا به اینجا برگردان . در این موقع دانش آموز ریاضی دخالت کرد و گفت : « ممکن است لازم نباشد به اینجا برگردی ، به شرطی که . . . » . شما چه فکری کنید ، دانش آموز ریاضی چه مطلبی به آنها گفت ؟

۲۴۱. (a) در سه کیسه ، n عدد گردو وجود دارد . احتمال اینکه تعداد گردوها در هر سه کیسه مساوی باشد ، چقدر است ؟

(b) در سه کیسه ، n کیلوگرم آرد وجود دارد . احتمال اینکه در هر کیسه $\frac{n}{3}$ کیلوگرم آرد وجود داشته باشد ، چقدر است ؟

۲۴۲. در ایستگاه اعلام شده است : « اتوبوس هر ۶ دقیقه یکبار و ترولیبوس هر ۸ دقیقه یکبار حرکت می کند » .

دو نفر در ایستگاه با هم صحبت می کردند :

- بطور متوسط مسافرها چقدر باید انتظار بکشند ؟

- اگر فقط اتوبوس بود ، بطور متوسط $3 = 2:6$ دقیقه انتظار لازم

بود ؛ و اگر فقط ترولیبوس بود ، زمان متوسط انتظار $4 = 2:8$

دقیقه می شد ؛ ولی چون مسافر می تواند هم به اتوبوس و هم به

ترولیبوس سوار شود ، زمان متوسط انتظار $3\frac{1}{2} = \frac{3+4}{2}$ دقیقه

می شود .

- نه ! این درست نیست ! باید طور دیگری محاسبه کرد .

کوچکترین مضرب مشترك ۶ و ۸ می شود ۲۴ . در هر ۲۴ دقیقه

$4 = 6:24$ اتوبوس و $3 = 8:24$ ترولیبوس رد می شود . بنابر

این در هر ۲۴ دقیقه روی هم $7 = 3 + 4$ وسیله از اینجا عبور

می‌کند . در نتیجه فاصله زمانی بین هردو وسیله متوالی

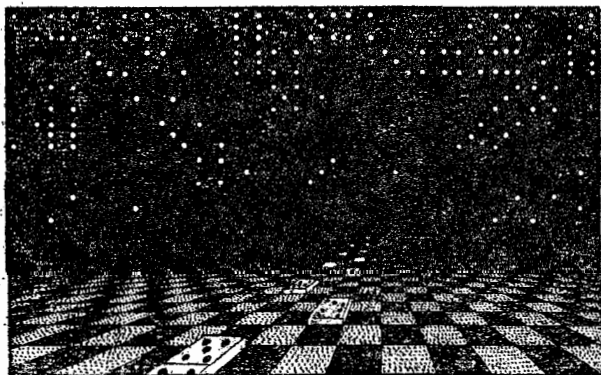
$$3\frac{3}{7} = 24:7 \text{ دقیقه و زمان انتظار متوسط } 1\frac{5}{7} = 2:\frac{3}{7} \text{ دقیقه}$$

می‌شود .

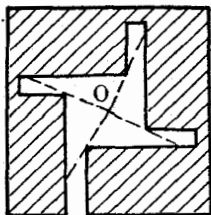
حق با کدام است ؟ (البته فرض بر این است که فاصله‌های زمانی

دقیقاً رعایت شود .)

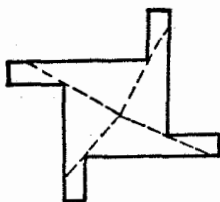
حل مسأله‌ها



یکی از جوابهای ممکن در شکل ۲۲ داده شده است. با مختصری تغییر در این شکل می توان جواب قسمت دوم مسأله را بدست آورد (شکل ۲۲ را ببینید).



شکل ۲۳



شکل ۲۲

۲. (a) باید پرسشها را طوری کرد که در هر پرسش، انواع ممکنه عددها نصف شود. در این صورت اگر ۲۸ عدد ممکن باشد، n پرسش کافی خواهد بود. چون طبق شرط روی هم $۱۷ < ۱۰۵$ شماره مختلف تلفن وجود دارد، ۱۷ پرسش کافی است. پرسشها را با روشهای متفاوت می توان کرد. مثلاً می توان پرسید: «آیا درست است که شماره تلفن شما از ۵۰۰۰۰ بزرگتر است؟» و اگر جواب داد «بله»، پرسش دوم را به این صورت که: «آیا از ۷۵۰۰۰ بزرگتر است؟» و غیره. ولی ساده تر این است که از دستگاه عدد شماری به مبنای ۲ استفاده کنیم، که در آن تنها از دو رقم ۰ و ۱ استفاده شده است. هر عدد کوچکتر از ۱۰۰۰۰۰ در این دستگاه، حداکثر با ۱۷ رقم ۰ یا ۱ نوشته می شود. می توان پرسشها را این طور کرد:

(۱) آیا درست است که آخرین رقم شماره تلفن در دستگاه عدد شماری به مبنای ۲ مسای واحد است؟

(۲) آیا رقم ماقبل آخر شماره تلفن واحد است؟ و غیره.

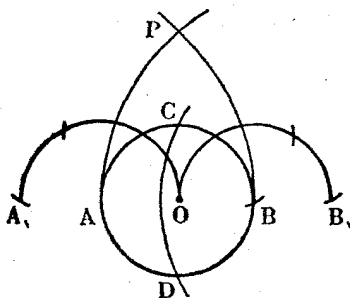
حالا ثابت می کنیم که ۱۶ پرسش کافی نیست. در حقیقت ترکیبهای مختلف ۱۶ کلمه «بله» و «نه» برابر است با ۲۱۶. چون $۲۱۶ > ۱۰۰۰۰۰$ ، دو شماره مختلف تلفن، منجر به یک نوع جواب می شود و برای ما هیچ امکانی وجود ندارد که بدانیم کدامیک از آنها درست اند. روش «نصف کردن» که در اینجا از آن استفاده کردیم، برای بسیاری

از مسأله‌ها به کار می‌رود ، مثلاً وقتی که بخواهیم فرد مشخصی را در مقابل پاسخهای «بله» و «نه» پیدا کنیم ، باید پرسش را طوری کرد که احتمال پاسخ مثبت یا منفی یکی باشد . مثلاً نباید از این پرسش شروع کرد که آیا این شخص زیست‌شناس است ؟ بلکه خیلی بهتر است که بپرسیم : «آیا دانشمند است ؟»

(b) در این حالت برای حل مسأله ۲۲ پرسش کافی است . برای این منظور می‌توان مثلاً این طور عمل کرد . ابتدا با ۱۵ پرسش ، ۱۵ رقم پشت سرهم از ۱۷ رقم را معین می‌کنیم (رقمها را در عدد شماری به مبنای ۲ گرفته‌ایم) . سپس می‌پرسیم : «آیا در یکی از ۱۵ پاسخ قبلی دروغ گفته‌اید ؟» اگر بگویید «بله» ، یا یکی از ۱۵ پاسخ قبلی و یا پاسخ آخر او درست نیست . با روش «نصف کردن» با چهار پرسش می‌فهمید ، کدامیک از ۱۶ پاسخ قبلی درست نبوده است و سپس با دو پرسش ، دو رقم آخر عدد را معین می‌کنید . اگر در مقابل پرسش شانزدهم بگویید «نه» ، مطمئن می‌شوید که این پاسخ او دروغ نیست و شما ۱۵ رقم درست عدد را می‌دانید (اگر قرار باشد که پاسخ شانزدهم او دروغ باشد ، به این معنی است که دوباره دروغ گفته است و این با فرض مسأله مخالف است .) برای اینکه دو رقم بقیه را بدانیم ، پنج پرسش کافی است . مثلاً می‌توان برای هر رقم دوبار پرسید و اگر پاسخها متناقض یکدیگر بود ، پرسش را برای بار سوم باید تکرار کرد . باید دبستان را در دهکده A ساخت .

۳.

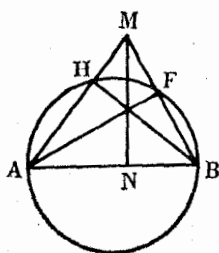
۴.



شکل ۲۴

(a) O را مرکز دایره مفروض به شعاع R و A را نقطه‌ای از محیط دایره فرض می‌کنیم (شکل ۲۴) . پرگار را به اندازه R باز می‌کنیم و با شروع از نقطه A به عنوان مرکز (و با استفاده از اینکه ضلع ۶ ضلعی منتظم محاط در

دایره برابر است با R ، نقطه B ، انتهای دیگر قطری را که از A می‌گذرد، پیدا می‌کنیم. سپس دایره‌هایی به مرکزهای A و B رسم می‌کنیم و روی آنها نقطه‌های A_1 و B_1 ، قرینه‌های O نسبت به A و B را پیدا می‌کنیم. حالا به مرکزهای A_1 و B_1 و شعاع R ،



شکل ۲۵

قوسهائی رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در P قطع کنند. به سادگی معلوم می‌شود که $OP = R\sqrt{5}$. حالا به مرکز B_1 و شعاع مساوی $R\sqrt{5}$ قوسی رسم می‌کنیم تا محیط دایره مفروض را در C و D قطع کند. به سادگی می‌توان ثابت کرد که نقطه‌های A ، B ، C و D رأسهای یک مربع‌اند.

(b) راه حل در شکل ۲۵ داده شده است.

اگر زنجیر را در حلقه سوم آن پاره کنیم (شکل ۲۶)، زنجیر به سه قسمت جدا از هم تقسیم می‌شود. با این سه قسمت می‌توان پرداخت

۵.



شکل ۲۶

روزانه را به سهولت انجام داد.

ابتدا ثابت کنید که ارتفاع وارد بر AD از مثلث AMD برابر است با نصف مجموع ارتفاعهای مثلثهای ABN و NCD . از آنجا نتیجه بگیرید که مساحت مثلث AMD برابر است با مجموع مساحتهای دو مثلث ABN و NCD .

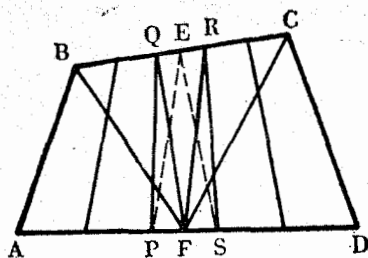
۶.

قبلا ثابت کنید که لم زیر درست است:

۷.

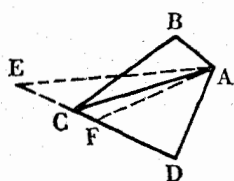
لم. اگر E و F وسط ضلعهای BC و AD از یک چهار ضلعی محدب $ABCD$ باشد، مساحت مثلث AED برابر است با مجموع مساحتهای مثلثهای ABF و FCD .

حالا $ABCD$ را چهار ضلعی مفروض (شکل ۲۷) و $PQRS$ را چهار ضلعی بگیرید که وسط پنج چهار ضلعی مورد نظر قرار گرفته باشد،



شکل ۲۷

دو مثلث ABF و FCD و همچنین در مورد دو مثلث PQF و FRS به کار ببرید.



شکل ۲۸

فرض می کنیم که مساحت مثلث ABC کوچکتر از مساحت مثلث ACD باشد. مثلث ACE را هم ارز مثلث ABC می سازیم، به نحوی که ضلع CE از آن در امتداد DC قرار گرفته باشد. حالا در مثلث AED میانه AF را رسم می کنیم (شکل ۲۸).

۸

اگر مسافر زنجیری داشته باشد که از $n = (k+1)2^{k+1} - 1$ حلقه، درست شده باشد، می تواند آنرا در k نقطه طوری پاره کند که قطعه زنجیرهایی شامل $(k+1), 2(k+1), 2^2(k+1), \dots, 2^k(k+1)$ حلقه بدست آورد. مسافر با در دست داشتن این قطعه زنجیرها و k حلقه زنجیر جداگانه، خواهد توانست پرداخت خود را در n روز به ترتیب انجام دهد. اگر تعداد حلقه های زنجیر، یعنی n ، به صورت $n = (k+1)2^{k+1} - 1$ نباشد، باید کوچکترین عدد صحیح k را پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم: $n < (k+1)2^{k+1} - 1$. در حالت خاص $n = 100$ ، کافی است زنجیر را در $k = 4$ حلقه آن پاره کنیم.

۹

عقربه ها برای نخستین بار در ساعت ۱۳ و ۵ دقیقه و $27\frac{3}{11}$ ثانیه

۱۰

برهم منطبق می شوند.

مسأله به هیچگونه محاسبه ای نیاز ندارد. روشن است که هر قدر

۱۱

چای از فنجان کم شود به همان اندازه شیر به آن اضافه شده است .
 بنابراین همیشه مقدار چای در فنجان شیر ، به همان اندازه مقدار
 شیر در فنجان چای است و این امر هیچگونه بستگی به تعداد جابجا
 کردن و یا نوع به هم زدن ندارد .

۱۲. می توان شاخهای لامپ را به ترتیب و در جهت حرکت عقربه های
 ساعت از ۱ تا ۷ و سوراخهای پرز را به ترتیب ، ولی در خلاف جهت
 حرکت عقربه های ساعت از ۱ تا ۷ نام گذاری کرد . اگر فکر کنید ،
 ممکن است راه حل های دیگری هم پیدا کنید .

۱۳. فرض می کنیم که دوره تناوب وجود داشته باشد و از n رقم تشکیل
 شود . در رشته طبیعی عددها ، وقتی که به اندازه کافی جلو برویم ،
 می توانیم به عددی برسیم که در آن n رقم متوالی مساوی صفر باشد ،
 و بنابراین دوره تناوب باید از رقم های مساوی صفر تشکیل شده
 باشد . به همین ترتیب می توان استدلال کرد که دوره تناوب باید از
 رقم های مساوی واحد تشکیل شده باشد . و این دو نتیجه متناقض
 یکدیگر را رد می کنند .

۱۴. هواپیما باید به طرف شمال پرواز کند . در حقیقت کوتاهترین راه
 بین دو نقطه ای که روی کره زمین قرار گرفته اند ، روی قوس دایره
 عظیمه ای قرار دارد که این دو نقطه را به هم وصل می کند . چون
 عشق آباد تقریباً در ۵۸° درجه طول شرقی و سان فرانسسکو تقریباً
 در ۱۲۲° درجه طول غربی قرار گرفته است ، و $۱۸۰^\circ = ۱۲۲^\circ + ۵۸^\circ$ ،
 دایره عظیمه ای که از این دو شهر می گذرد ، منطبق بر نصف النهارهای
 عشق آباد و سان فرانسسکو است .

متذکر می شویم که عشق آباد و سان فرانسسکو ، تقریباً روی یک مدار
 قرار دارند (۳۸° درجه عرض شمالی) . حالا امتحان کنید که راه در
 طول مدار چقدر طولانی تر از راه در طول نصف النهار ، و از طریق
 قطب شمال ، است ؟

۱۵. عدد را به این صورت بنویسید :

$$N = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \dots + a_n$$

که در آن a_i عبارت است از رقمهای عدد. ضمناً به نامساوی زیرهم توجه کنید:

$$a_0 \cdot a_1 \dots a_n \leq a_n \cdot 9^n$$

۱۶. ثابت کنید که بعد از هر تقسیم $4k+5$ قطعه کاغذ بدست می آید.
۱۷. نقطه M را وسط پاره خط O_1O_2 فرض کنید. در شکل ۳، پاره خطهای O_1B ، O_1C ، O_2B ، O_2C را رسم کنید. با استفاده از این مطلب که مثلثهای O_1BO_2 و O_1CO_2 قائم الزاویه اند، زاویه های BMO_1 و CMO_1 را بر حسب زاویه های مثلث اصلی بنویسید.

$$\angle BAC + \angle BMC = 180^\circ$$

بالاتر ثابت کنید:

۱۸. (a) کسی که می خواهد برنده باشد، باید در هر حرکت آنقدر سنگریزه از توده بزرگتر بردارد، که تعداد سنگریزه های دو توده برابر شوند. اگر در ابتدا تعداد سنگریزه های دو توده برابر است، باید حرکت اول را به طرف مقابل داد.

(b) ابتدا باید با يك حرکت، تمام سنگریزه های یکی از توده ها را بردارید. سپس در هر حرکت بعدی، تعداد سنگریزه های دو توده باقی مانده را مساوی کنید.

۱۹. (a) اثبات را براساس استقراء روی تعداد خانه های واقع در داخل چند ضلعی، که آنرا n می نامیم، می دهیم. به ازای $n=1$ و $n=2$ ، حکم مسأله روشن است. فرض کنید که حکم برای $n=k$ ($k \geq 2$) درست باشد. چند ضلعی M_{k+1} را در نظر می گیریم که از $k+1$ خانه تشکیل شده است. این چند ضلعی را به نحوی به دو چند ضلعی M_k و l تقسیم می کنیم، که اولی از k خانه و دومی از يك خانه تشکیل شده باشد. مرکز ثقل چند ضلعی M_{k+1} روی خط l قرار دارد که از مرکز ثقلهای M_k و l گذشته است، دو مرکز ثقل اخیر هم طبق فرض استقراء، تنها به کمک خط کش قابل جستجو است.

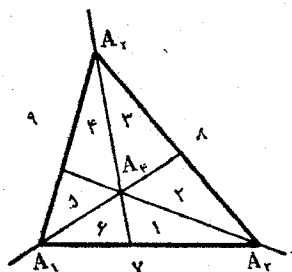
همین مسأله را برای حالتی حل کنید که تعداد گنجشکها، به جای ۴۴، عدد طبیعی دلخواهی باشد.

۲۱. براون مرتکب اشتباه شده است، چون هردو بار دروغ گفته است، سمیت هر دوبار راست گفته است.

۲۲. ثابت می‌کنیم که مجموع سالهای سن ۲۰ دانش آموز بزرگتر، از ۲۸۰ سال کمتر نیست. اگر کوچکترین فرد این بیست نفر کمتر از ۱۴ سال نداشته باشد، در این صورت هیچیک از ۱۹ نفر بقیه هم کمتر از ۱۴ سال نخواهند داشت و در نتیجه مجموع سالهای سن آنها روی هم، کمتر از $280 = 14 \times 20$ سال نخواهد بود. اگر هم جوانترین فرد این بیست نفر کمتر از ۱۴ سال داشته باشد، هر یک از ۱۱ نفر بقیه هم کمتر از ۱۴ سال و روی هم کمتر از $154 = 14 \times 11$ سال خواهند داشت و سهم بیست نفر از $280 = 154 - 434$ سال کمتر نخواهد بود.

۲۳. (a) معلوم است که اگر صد رقم را حذف کنیم، یازده رقم باقی می‌ماند. می‌توان رقمها را طوری حذف کرد که عدد ۰۰۰۰۰۱۲۳۴۵۰ باقی بماند. ثابت کنید که کوچکتر از این عدد نمی‌توان بدست آورد.

(b) باید رقمها را طوری حذف کرد که عدد ۹۹۹۹۹۷۸۵۹۶۰ باقی بماند.



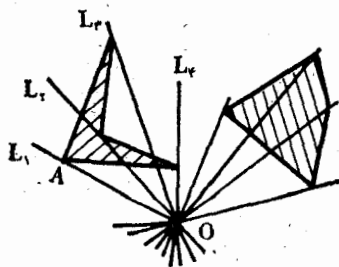
شکل ۳۰

۲۴. (a) چهار نقطه دلخواه از پنج نقطه انتخاب کنید: یا این چهار نقطه یک چهار ضلعی محدب می‌سازند و یا یکی از نقطه‌ها داخل مثلثی قرار می‌گیرد که از سه نقطه دیگر به وجود آمده است (ثابت کنید). در حالت اخیر، نقطه پنجم می‌تواند در

یکی از ۹ منطقه‌ای که در شکل ۳۰ نشان داده شده است، قرار گیرد. تحقیق کنید که برای هر یک از این نه حالت ممکن، می‌توان چهار

ضلعی مورد نظر را ساخت .

(b) از هر دو نقطه دلخواه از این ۴۰۰۰ نقطه ، می توان خط راستی عبور داد. همه این خطهای ممکنه را رسم می کنیم و سپس نقطه O را روی صفحه نقطه ها طوری انتخاب می کنیم که روی هیچک از این



شکل ۳۱

خطها قرار نگیرد . از نقطه O نیم خطهایی رسم می کنیم که هر کدام از آنها از یکی از این ۴۰۰۰ نقطه عبور کند . نقطه O را طوری اختیار می کنیم که هیچ دو نیم خطی از این نوع برهم منطبق نباشد . نیم خطها را ، مثلاً با شروع از OA ، و در جهت حرکت عقربه های ساعت به ترتیب $L_1, L_2, L_3, \dots, L_{4000}$ نام گذاری می کنیم (شکل ۳۱).

حالا نیم خطها را به گروه های چهار تایی تقسیم می کنیم : در گروه اول ، نیم خطهای L_1, L_2, L_3, L_4 ؛ در گروه دوم L_5, L_6, L_7, L_8 و غیره . به سادگی معلوم می شود که هر چهار ضلعی که رأسهای آن بر نیم خطهای یکی از این گروه ها واقع باشد ، هر چهار ضلعی دیگری را که رأسهایش بر نیم خطهای گروه دیگری قرار دارد ، قطع نمی کند .

۲۵. (a) زاویه را تا زاویه قائمه کامل کنید .

(b) زاویه ۱۹ درجه را ۱۹ برابر کنید ، زاویه ای مساوی ۳۶۱ درجه بدست می آید ، که از آنجا می توانید زاویه ای مساوی ۱ درجه بسازید .

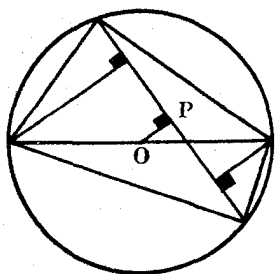
۲۶. کوچکترین عدد به صورت $\frac{1}{2^m}$ را که در مجموع $\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

وجود دارد ، در نظر بگیرید . وقتی که جمله های این مجموع را به یک مخرج

تبدیل کنیم ، صورت کسری که معادل $\frac{1}{2^m}$ است عددی فرد و صورت

مترك از كسره‌های معادل جمله‌ها ، دیگر مجموع ، عددی زوج و بنابراین مجموع صورتهای عددی فرد خواهد شد و نمی‌تواند بر مخرج مشترك ، که عددی زوج است ، قابل قسمت باشد .

۲۷. فرض می‌کنیم هیئت نمایندگی A با سه هیئت نمایندگی دیگر ، به نام‌ها B ، C و D ، زبان مشتركی داشته باشد . این سه هیئت نمایندگی نیز ، لاقل - و هیئت نمایندگی ، و مثلاً B و C ، زبان یکدیگر را می‌فهمند . در این صورت A ، B و C سه هیئت نمایندگی مورد نظرند . در حالتی هم که A با بیش از دو هیئت نمایندگی زبان مشترك نداشته باشد ، می‌توان سه هیئت نمایندگی E ، F و G را پیدا کرد که هیچکدام از آنها با A زبان مشترك نداشته باشند . در این صورت E ، F و G ، سه هیئت نمایندگی مورد نظرند (ثابت کنید) .



شکل ۳۲

۲۸. از نقطه O ، مرکز دایره محیطی

چهار ضلعی ، عمود OP را بر قطری از چهارضلعی که از مرکز دایره نمی‌گذرد ، فرود آورید (شکل ۳۲) .

۲۹. ثابت کنید که برای تبدیل ۲۵

روبل به اسکناسهای ۱ ، ۳ و ۵ روبلی ، باید تعداد اسکناس‌های خرد ، عددی فرد باشد .

۳۰. a فرض کنید که نقطه‌های مفروض ، رأسهای يك شش ضلعی محدب

باشند . در چنین حالتی ، جواب به سادگی بدست می‌آید ، زیرا مجموع زاویه‌های داخلی يك شش ضلعی محدب مساوی ۷۲۰ درجه است و بنابراین لاقل یکی از آنها از ۱۲۰ درجه بیشتر است . حالتی می‌ماند که ۵ ، ۴ یا ۳ نقطه از این شش نقطه بر رأسهای يك چند ضلعی محدب واقع باشند و بقیه این نقطه‌ها در داخل این چند ضلعی واقع شده باشند . قطرهایی را که از يك رأس این چند ضلعی می‌گذرد ، رسم می‌کنیم . این قطرها ، چند ضلعی را به مثلثهایی تبدیل می‌کنند . در

داخل یکی از این مثلثها، لااقل یکی از نقطه‌های مفروض قرار دارد. این نقطه را به رأسهای مثلث وصل می‌کنیم، سه زاویه بدست می‌آید که مجموع آنها مساوی 360° درجه است. بنابراین لااقل یکی از آنها کمتر از 120° درجه نیست.

(b) دو حالت در نظر می‌گیریم:

I. فرض می‌کنیم A_1, A_2, A_3, A_4 و A_5 رأسهای یک پنج ضلعی محدب باشد. کوچکترین زاویه داخلی این پنج ضلعی از 108° درجه تجاوز نمی‌کند. برای سهولت کار فرض می‌کنیم که این زاویه در رأس A_1 باشد، قطرهای A_1A_3 و A_1A_4 ، این زاویه را به سه قسمت تقسیم می‌کنند، که کوچکترین آنها نمی‌تواند از 36° درجه تجاوز کند. بنابراین در این حالت $\alpha \leq 36^\circ$. تساوی $\alpha = 36^\circ$ ، وقتی پیش می‌آید که پنج ضلعی منتظم باشد.

II. فرض می‌کنیم که A_1, A_2, A_3, A_4 و A_5 رأسهای یک پنج ضلعی محدب نباشند. ابتدا ثابت کنید که در این حالت یکی از این پنج نقطه داخل مثلثی است که از سه نقطه دیگر درست شده است. مثلاً فرض کنید، نقطه A_4 داخل مثلث $A_1A_2A_3$ واقع باشد. A_4 را به A_1, A_2 و A_3 وصل می‌کنیم، هر یک از زاویه‌های مثلث به دو قسمت تقسیم می‌شود که کوچکترین آنها نمی‌تواند از $30^\circ = 60^\circ : 2$ تجاوز کند. بنابراین در این حالت $\alpha \leq 30^\circ$. به این ترتیب ما کمترین مقدار α ، همان $\alpha = 36^\circ$ است.

۳۱. اگر یکی از عددهای x, y و z مساوی صفر باشد، بقیه هم مساوی صفر می‌شوند. فرض می‌کنیم x و y و z مساوی صفر نباشند، در این صورت فرض می‌کنیم: $x = 2^m x_1, y = 2^n y_1, z = 2^p z_1$ ، که در آنها عددهای x_1, y_1 و z_1 ، عددهایی فرد هستند. مثلاً $m \leq n \leq p$ در نظر می‌گیریم. در این صورت دوطرف تساوی مفروض را می‌توان به $(2^m)^2$ تقسیم کرد؛ تساوی که بدست می‌آید، می‌توان به این صورت نوشت:

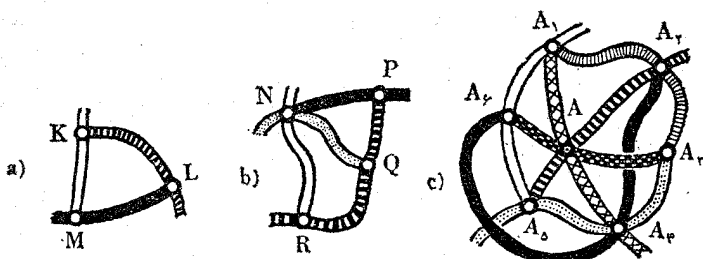
$$u^2 + v^2 + w^2 = 2^{s+1} uvw \quad (s \geq 0)$$

که در آن عددهای u و v فرد و عدد w زوج است. ثابت کنید که سمت راست این تساوی بر 4 قابل قسمت است، درحالی که سمت چپ آن بر 4 قابل قسمت نیست. یعنی معادله مفروض برای عددهای x, y و z (به استثنای صفر)، جوابی ندارد.

۳۲. از نقطه C ، پاره خط CF را مساوی و موازی AB رسم کنید و مثلث CFD را مورد مطالعه قرار دهید.

۳۳. ابتدا دو لم ثابت می کنیم.

لم ۱. برای هرایستگاه، خط سیری وجود دارد که از آن عبور نمی کند.



شکل ۳۳

اگر از ایستگاه مفروض K (شکل ۳۳ - a)، فقط یک خط سیر عبور کند، در این صورت همه خطهای دیگر از آن عبور نخواهند کرد. فرض می کنیم که از ایستگاه K ، دو خط سیر، و مثلاً KL و KM عبور کند (L و M ایستگاههایی غیر از K ، روی این خط سیرها هستند). با توجه به شرط c)، خط سیری مثل LM وجود دارد که از L و M می گذرد. این خط سیر نمی تواند از K عبور کند، زیرا خط سیر LM غیر از KL یا KM است و با توجه به شرط b)، برای خط سیرهای مختلف تنها یک ایستگاه مشترک وجود دارد. لم ۱ ثابت شد.

لم ۲. از هرایستگاه سه خط سیر عبور می کند.

از ایستگاه N (شکل ۳۳ - b) به ایستگاه P از خط سیر PQR (که از N عبور نمی کند)، می توان از طریق خط سیری مثل NP رسید (شرط c)، این خط سیر NP (طبق شرط b) از Q و R عبور نمی کند.

به همین ترتیب ثابت می شود که باید خط سیرهای متفاوت NQ و NR هم . غیر از NP ، وجود داشته باشد . همه این خط سیرها که از N عبور می کنند ، بنابر شرط (b) ، روی خط سیر PQR ، ایستگاه مشترکی دارند که روی یکی از خط سیرهای NP ، NQ و NR قرار گرفته اند . لم ۲ ثابت شد .

روی هر یک از سه خط سیری که از N عبور می کند ، دو ایستگاه دیگر وجود دارد . طبق شرط (c) ، از ایستگاه N به هر ایستگاه دیگر می توان ۱ یکی از این سه خط رسید . بنابراین در شهر روی هم ۷ ایستگاه وجود دارد . از این ۷ ایستگاه روی هم $۷ \times ۳ = ۲۱$ خط عبور می کند ، ولی ضمناً هر خط سه بار به حساب آمده است . در نتیجه تعداد کل خط سیرها مساوی هفت است . در شکل ۳۳ - c ، طرحی از این هفت خط سیر داده شده است .

۳۴. فرض می کنیم که ممکن نباشد . کارتها را از ۱ تا ۱۲ نام گذاری می کنیم و آنها را در جهت حرکت عقربه های ساعت دور میز می چینیم (نقطه شروع می تواند دلخواه باشد) . به هر کدام از مهمانها هم شماره ای که روی کارت او نوشته شده است ، می دهیم . میز را طوری می چرخانیم که کارت اول در مقابل مهمان اول قرار گیرد . فرض کنیم که در این لحظه در مقابل مهمان i ام ، کارت a_i ام قرار گرفته باشد (۱۲ و ... و ۲ و ۱ $a_i =$) . برای اینکه مهمان i ام در مقابل کارت خودش قرار گیرد ، باید میز را در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت به اندازه زاویه ۳۰° . b_i بچرخانیم ، که در آن

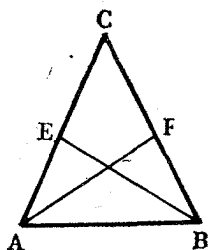
$$b_i = \begin{cases} i - a_i & (i > a_i) \\ i - a_i + 12 & (i \leq a_i) \end{cases}$$

ثابت کنید که b_i همه عددهای از ۱ تا ۱۲ را قبول می کند . b_i ها را جمع می کنیم ، بدست می آید :

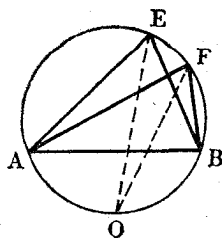
$$b_1 + b_2 + \dots + b_{12} = (1 + 2 + \dots + 12) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{12}) + 12k = 12k$$

که در آن k عددی صحیح است . ولی

۳۷. ابتدا این لم را ثابت کنید: اگر دو مثلث در قاعده، زاویه رأس و نیمساز این زاویه برابر باشند، دو مثلث برابرند. برای این منظور، قاعده‌های دو مثلث را برهم منطبق کنید و نیمسازهای آنها را ادامه دهید تا دایره محیطی را قطع کنند (شکل ۳۶ - a).



b)



a)

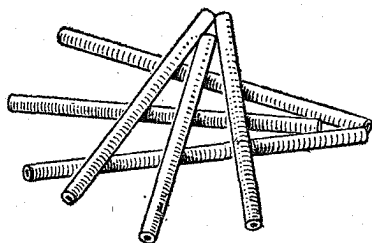
شکل ۳۶

با استفاده از این لم ثابت کنید که اگر در مثلث ABC دو نیمساز BE و AF برابر باشند، مثلثهای AFC و BEC برابر می‌شوند (شکل ۳۶ - b).

۳۸. جواب در شکل ۳۷ داده شده است.

۳۹. به این نکته توجه می‌کنیم که

اگر چنین خطی وجود داشته باشد، باید تعداد رأسهای چند ضلعی که در یک طرف این خط قرار دارد، با تعداد رأس‌هایی که در طرف دیگر خط قرار دارد، برابر باشد.



شکل ۳۷

۴۰. ثابت کنید که باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع رقمهای آن عدد بر ۹. از اینجا نتیجه بگیرید که اگر مجموع رقمهای دو عدد با هم برابر شود، تفاضل آنها بر ۹ قابل قسمت است.

۴۱. اگر در مرحله‌ای، هر ۹ عدد، مساوی واحد شود، به این معناست

که قبل از آن هر ۹ عدد، یا مساوی واحد و یا مساوی صفر بوده است. فرض کنید، در مرحله n ام، برای نخستین بار هر ۹ عدد، مساوی واحد شده باشد. در این صورت در مرحله $(n-1)$ ام، هر ۹ عدد، باید مساوی صفر باشند. بنابراین در مرحله $(n-2)$ ام، باید هر دو عدد متوالی با هم فرق داشته باشند، یعنی عددهای ردیف اول، سوم، پنجم، هفتم و نهم (با شروع از هر جا و مثلاً در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) باید یکی باشند. ولی جای عددهای اول و نهم در کنار یکدیگر است و نمی‌توانند مساوی باشند. به این ترتیب به تناقض می‌رسیم.

۴۲. بزرگترین یال پاکت را در نظر بگیرید و ثابت کنید که این یال نمی‌تواند مجاور به یک زاویه منفرجه باشد.

۴۳. عددها را به $n_1, n_2, \dots, n_{100}$ نشان می‌دهیم و مجموعه‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$S_1 = n_1, S_2 = n_1 + n_2, S_3 = n_1 + n_2 + n_3, \dots$$

$$S_{100} = n_1 + n_2 + \dots + n_{100}$$

اگر هیچکدام از عددهای $S_1, S_2, \dots, S_{100}$ بر ۱۰۰ قابل قسمت نباشند، چون در تقسیم هر عدد بر ۱۰۰، یکی از ۹۹ عدد ۱، ۲، ۳، ...، ۹۹ به عنوان باقیمانده بدست می‌آید، لااقل در دو مورد باقیمانده‌ها با هم مساوی می‌شوند.

فرض کنید این دو عدد مثلاً S_{21} و S_{87} باشد، در این صورت عدد

$$n_{22} + n_{23} + \dots + n_{86} + n_{87} = S_{87} - S_{21}$$

بر ۱۰۰ قابل قسمت خواهد بود.

۴۴. حساب کنید، حداکثر تعداد امتیازی که نفر دوم می‌تواند بیاورد و حداقل تعداد امتیازی که نفرهای پنجم تا هشتم روی هم می‌توانند داشته باشند، چقدر است. ثابت کنید شطرنج بازهایی که در ردیفهای پنجم تا هشتم قرار گرفته‌اند، همه از ۴ شطرنج بازی که در ردیف اول تا چهارم‌اند، باخته‌اند.

۴۵. به ۱۶۲ طریق.

۴۶. ابتدا m را ثابت کنید (به طریق استقراء ریاضی) :

لم . فرض کنید ، در تجزیه عدد m به عاملهای اول ، بدست آید :

$$m = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}$$

دان صورت تعداد مقسوم علیه های m (با به حساب آوردن ۱ و m) چنین است :

$$(p_1 + 1) (p_2 + 1) \dots (p_s + 1)$$

عددی ۱ که مورد نظر مسأله است به k نشان می دهیم ، چون بر ۲ و ۹ قابل قسمت است ، داریم :

$$k = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \dots p_s^{n_s}$$

به ضمناً $n_1 \geq 1$ و $n_2 \geq 2$. بنابر لم ، بدست می آید :

$$14 = (n_1 + 1) (n_2 + 1) (n_3 + 1) \dots (n_s + 1)$$

که در آن $n_1 + 1 \geq 2$ و $n_2 + 1 \geq 3$. از آنجا بدست می آید :

$$n_1 + 1 = 2 \text{ و } n_2 + 1 = 7 \text{ . عدد } k \text{ مقسوم علیه اولی جر ۲ و ۳}$$

ندارد . یعنی $k = 2 \times 3^6$.

(b) در این حالت هم استدلال به همان ترتیب است ، درحالتی که تعداد مقسوم علیه های k مساوی ۱۵ باشد ، دو جواب خواهیم داشت :

$$k = 2^2 \times 3^4 \text{ ; } k = 2^4 \times 3^2$$

و واضح است که عدد k نمی تواند ۱۷ مقسوم علیه داشته باشد (در این مسأله اگر تعداد مقسوم علیه ها ، عددی اول باشد ، جوابی بدست نمی آید) .

۴۷. نقطه برخورد قطرهای آن .

۴۸. ثابت کنید ، برای اینکه حلزون بتواند به نقطه اولیه برگردد ، باید

در هر يك از چهار جهت ، زمانی مساوی حرکت کند .

۴۹. اگر تساوی $9 - 15x^2 = 7y^2$ برقرار باشد ، باید $2y^2$ و بنابراین y ،

بر ۳ قابل قسمت باشد . فرض کنید $y = 3u$ ، در این صورت

$$5x^2 = 3 + 21u^2$$

و از اینجا نتیجه می شود $x = 3v$. ولی در این حالت به تساوی زیر می رسیم :

$$vu^2 + 1 = 15v^2$$

ثابت کنید که عدد به صورت $vu^2 + 1$ ، هرگز بر ۳ قابل قسمت نیست.

۵۰. فرض کنید قالی اول و دوم در مساحت S_1 روی هم قرار گرفته باشند، همچنین سطح مشترک قالی اول و سوم را S_2 و سطح مشترک قالیهای دوم و سوم را S_3 و سطح مشترک سه قالی را S_4 می نامیم. ثابت کنید:

$$S_4 = 9 - (S_1 + S_2 + S_3) + S_4$$

۵۱. a را کوچکترین عدد این جدول و p ، q و r و s را عددهای چهار خانه مجاور آن بگیرید. از تساوی $4a = p + q + r + s$ نتیجه می شود:

$$(p - a) + (q - a) + (r - a) + (s - a) = 0$$

چون در هر یک از این پرانترها، عددی غیر منفی قرار دارد، بنابراین

$$a = p = q = r = s$$

و از آنجا نتیجه می شود که همه عددهای جدول با هم برابرند.

۵۲. عددی که شامل ۳۰۰ رقم واحد و تعداد دلخواهی صفر است، بر ۳ قابل قسمت است، ولی بر ۹ قابل قسمت نیست و بنابراین چنین عددی نمی تواند مجذور کامل باشد.

۵۳. ممکن نیست، زیرا هر سنگ دومینو یک خانه سفید و یک خانه سیاه را می پوشاند و بنابراین ممکن نیست در صفحه شطرنج دو خانه سیاه باقی بماند.

۵۴. برای سهولت کار، عدد بزرگتر را a و عدد کوچکتر را b می نامیم. روشن است که از تقسیم a بر b به باقیمانده ای مساوی ۱۱۱۱ می رسیم، یعنی اگر خارج قسمت تقسیم را q فرض کنیم، داریم:

$$a - bq = 1111$$

این تساوی را به صورت $a = bq + 1111$ می نویسیم. روشن است که هر مقسوم علیه از a و b باید مقسوم علیه ۱۱۱۱ هم باشد. ولی عدد ۱۱۱۱ مقسوم علیه هر دو عدد a و b است، بنابراین بزرگترین مقسوم علیه آنها هم خواهد بود.

مسئله را در حالت کلی هم می توان حل کرد. فرض می کنیم که

عدد a شامل n واحد و عدد b شامل m واحد باشد . با انجام تقسیم-های متوالی (آلفگودیتیم اقلیدس) ، می توان ثابت کرد که بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد مورد نظر برابر است با عددی که از d واحد تشکیل شده باشد، که در آن d عبارت است از بزرگترین مقسوم علیه n و m .

۵۵. مجموع زاویه های داخلی همه مثلثها را محاسبه می کنیم . زاویه هایی از این مثلثها که رأسشان یکی از نقطه های داخلی باشد، در مجموع 360° درجه می شوند . چون روی هم 30 نقطه داخلی وجود دارد ، زاویه های به رأس آنها ، مجموعاً $10800^\circ = 30 \times 360^\circ$ می شود ، آنچه که باقی می ماند ، عبارت است از زاویه هایی که رأس آنها بر یکی از رأسهای صد ضلعی منطبق است . روشن است که مجموع زاویه های داخلی يك صد ضلعی برابر است با :

$$180^\circ(100 - 2) = 17640^\circ$$

به این ترتیب، مجموع زاویه های داخلی همه مثلثها چنین می شود :

$$10800^\circ + 17640^\circ = 28440^\circ$$

مجموع زاویه های داخلی هر مثلث برابر با 180° درجه است و بنابراین

$$\text{تعداد مثلثها برابر } 158 = \frac{28440}{180} \text{ می شود.}$$

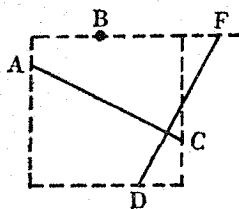
در مورد این مسأله ، این پرسش پیش می آید که آیا همیشه می توان يك صد ضلعی محدب را که 30 نقطه در داخل آن قرار گرفته است، به مثلثهایی تقسیم کرد ؟ اگر کوشش کنید ، می توانید ثابت کنید که این عمل همیشه ممکن است .

۵۶. (a) چون دو ضلع يك زاویه نسبت به نیمساز آن قرینه یکدیگرند ، اگر قرینه B را نسبت به خطی که پاره خط AB را قطع کرده است، پیدا کنیم ، یکی از نقطه های ضلع AC بدست می آید .

(b) اگر قرینه رأس مفروض را نسبت به دونیمساز دیگر پیدا کنیم ، دو نقطه از ضلع روبروی به این رأس بدست می آید و دیگر رسم مثلث مشکل نیست . بحث در باره امکان وجود مثلث را به عهده خواننده

می گذاریم .

۵۷. ۷۵ گلوله.



شکل ۳۸

۵۸. A, B, C و D را نقطه‌های مفروض بگیرید (شکل ۳۸). پاره خط DF را عمود بر پاره خط AC و مساوی آن رسم کنید. ثابت کنید که نقطه F روی ضلع مربع مورد نظر قرار دارد .

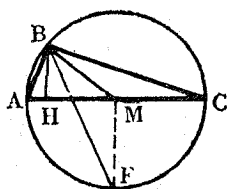
۵۹. رابطه $n^4 + (n+1)^4 = m^2 + (m+1)^2$ ، به سادگی به این صورت در می آید:

$$m(m+1) = n(n+1)[n(n+1)+2]$$

و حالا به سادگی می توان ثابت کرد که حاصلضرب دو عدد متوالی نمی تواند مساوی حاصلضرب دو عدد طبیعی به تفاضل ۲ باشد .

۶۰. تعداد دانش آموزان کلاس پنجم را که در بازی شرکت کرده اند ، x می گیریم . با استفاده از شرط اول مسأله ، ثابت کنید که مجموع امتیازهای این x نفر مساوی $7 - 2x + \frac{x(x-1)}{2}$ است . از آنجا ،

با استفاده از شرط دوم مسأله ، ثابت کنید که 14 بر x قابل قسمت است . بالاخره ثابت کنید که برای x ، تنها مقادیر 7 و 14 بدست می آید .



شکل ۳۹

۶۱. ABC را مثلث مفروض ، AH - ارتفاع ، AM - میانه و AF را نیمساز آن فرض کنید (F روی دایره محیطی مثلث ABC است). ثابت کنید ، مثلث BMF متساوی الساقین است و از آنجا نتیجه بگیرید که زاویه B مساوی 90 درجه است (شکل ۳۹).

۶۲. دو طرف رابطه فرض را مجذور کنید و از این نامساوی استفاده کنید که برای هر مقدار a و b داریم : $2ab \leq a^2 + b^2$.

۶۳. چون مجموع مساحت‌های سکه‌ها ، از مساحت سطح میز کمتر است ، داریم :

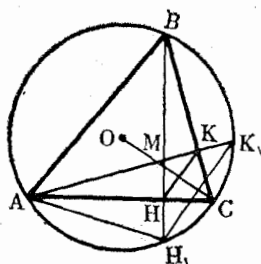
$$n\pi r^2 < \pi R^2 \Rightarrow \sqrt{n} < \frac{R}{r}$$

برای اثبات نامساوی دوم ، هر سکه را دو برابر در نظر بگیرید و ثابت کنید ، این سکه‌های بزرگ شده بطور کامل سطح دایره به شعاع $R - r$ را می‌پوشانند (برای این منظور باید بعضی سکه‌ها را روی هم قرار داد) . از اینجا نتیجه بگیرید که این نامساوی درست است :

$$\sqrt{n} > \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \text{ یا } 4n\pi r^2 > \pi(R - r)^2$$

۶۴. هر عدد صحیح a را می‌توان به صورت $a = 2^k \cdot b$ نشان داد، که در آن b عددی است فرد . ضمناً بین ۱۰۱ عدد فرد که کوچکتر از ۲۰۰ باشند ، لااقل دو عدد با هم برابر می‌شوند .

۶۵. عددهای 10^k و 20^k را می‌توان پیدا کرد، به نحوی که در تقسیم بر ۹ ، باقیمانده‌های مساوی داشته باشند. تفاضل این دو عدد، تنها از رقمهای ۹ و صفر تشکیل می‌شود. اگر این تفاضل را بر ۹ تقسیم کنیم، عددی بدست می‌آید که تنها شامل رقمهای مساوی واحد و صفر و بر N هم قابل قسمت است .



شکل ۴۰

۶۶. BH و AK را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در H_1 و K_1 قطع کنند (شکل ۴۰) . قوسهای CH_1 و CK_1 با هم برابرند، زیرا به ترتیب روبروی زاویه‌های HBC و KAC قرار دارند ، بنابراین شعاع OC بر وتر H_1K_1 عمود است. حالا دیگر کافی است، ثابت کنیم پاره‌خطهای KH و K_1H_1 موازی اند . برای این منظور ثابت می‌کنیم که KH وسط دو ضلع را در مثلث K_1MH_1 به هم وصل کرده است . زاویه‌های CAH_1 و K_1AC ، که روبرو به کمانهای مساوی‌اند، با هم برابرند

و بنابراین دو مثلث MAH و HAH_1 برابر می‌شوند و از آنجا $MH = HH_1$. به همین ترتیب بدست می‌آید: $MK = KK_1$.
ما مسأله را در حالتی که هر سه زاویه مثلث حاده باشد، ثابت کردیم و حالتی را که یکی از زاویه‌های مثلث منفرجه باشد، به عهده خواننده می‌گذاریم.

ضمن این مسأله، حکم جالب زیرهم ثابت شد: اگر یکی از ارتفاعهای مثلث را از طرف ضلع، به اندازه فاصله محل برخورد ارتفاعها تاضلع، ادامه دهیم، یکی از نقطه‌های دایره محیطی مثلث بدست می‌آید.
از خاصیت میانه‌های مثلث استفاده کنید.

۶۷.

۶۸. یکی از جوابهای ممکن، در

شکل ۴۱ داده شده است.
(چوب کبریت‌های مایل با
چوب کبریت‌های افقی، زاویه‌ای
مساوی ۳۰ درجه می‌سازند).

۶۹.

فرض می‌کنیم، عدد مورد نظر
دارای n رقم باشد (همه رقمها

شکل ۴۱

مساوی واحدند). چون این عدد بر $۳۳...۳۳$ ، که دارای صد رقم است، قابل قسمت است، باید بر ۳ و $۱۱...۱۱$ (شامل صد رقم مساوی واحد)، قابل قسمت باشد. به این ترتیب، از یک طرف، n مضربی است از ۳ و از طرف دیگر، n باید مضربی از n باشد (مسأله ۵۴ را ببینید). کوچکترین عددی که با این شرطها می‌سازد، عبارت است از $n = ۳۰۰$. یعنی، عدد مورد نظر با ۳۰۰ رقم مساوی واحد نوشته می‌شود.

۷۰.

فرض کنید، جدول T_1 بعد از چند تبدیل، با شرط مسأله، به جدول T_2 تبدیل شود، که در آن تعداد علامتهای منفی، حداقل باشد. یعنی با تبدیل جدول T_2 ، تعداد علامتهای منفی آن نتواند کمتر شود. چنین جدولهایی را کمترین می‌نامیم. ثابت می‌کنیم که تعداد علامتهای منفی در کمترین، نمی‌تواند بیشتر از چهار باشد. در

حقیقت، در هر ستون و هر سطر جدول کمترین، حداکثر دو علامت منفی وجود دارد (در غیر این صورت، علامتهای آن سطر یا ستون را به مخالف خود تبدیل می‌کنیم، تا تعداد علامتهای منفی کمتر شود). فرض می‌کنیم، جدول کمترینی وجود داشته باشد که در آن بیش از چهار علامت منفی وجود داشته باشد. در سطر i از آن، که آنرا سطر A می‌نامیم، دو علامت منفی قرار دارد. ستونهایی را که این علامتهای منفی، در آنها قرار دارد، P و Q می‌نامیم. دوتا از علامتهای منفی باقیمانده، یا در ستونهای P و Q و یا در دو ستون دیگر قرار گرفته است. در صورت لزوم، می‌توان با تغییر علامتها در سطر A ، ترتیبی داد که در دو ستون جدول، دو علامت منفی قرار گرفته باشد. حالا علامت منفی پنجم را در نظر می‌گیریم. این علامت نمی‌تواند در هیچکدام از ستونهای فوق قرار گرفته باشد، زیرا جدول کمترین است. فرض کنیم که این علامت منفی، در سطر B واقع باشد. با تغییر علامتها، در یک یا دو ستون فوق، می‌توان ترتیبی داد که در این سطر ۳ علامت منفی قرار گیرد.

جدولی که روی قطر آن ۱، ۲، ۳ یا ۴ علامت منفی و در بقیه خانه‌ها، علامت مثبت قرار داشته باشد، یک جدول کمترین است (یعنی مفسر می‌تواند مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ را قبول کند). برای اثبات این مطلب، توجه می‌کنیم که تبدیل جدول T_1 به T_2 ، به تعداد تبدیل یک سطر یا ستون مربوط نیست، بلکه تنها به زوج بودن این تعداد مربوط است. در حقیقت، فرض کنید، مثلاً سطر اول a مرتبه و ستونها به ترتیب b_1, b_2, b_3, b_4 مرتبه تغییر کرده باشند. در این صورت علامتی که در گوشهٔ چپ و بالای جدول قرار دارد، $a + b_1$ مرتبه و علامتهای سه‌خانهٔ دیگر به ترتیب $a + b_2$ و $a + b_3$ ، $a + b_4$ مرتبه تغییر کرده‌اند. در حالتی که a زوج باشد، می‌توان به جای آن صفر، و در حالتی که فرد باشد، به جای آن واحد را انتخاب کرد، بدون آنکه نتیجه کار تفاوت کند. به این ترتیب، می‌توان تنها تبدیلهایی را در نظر گرفت، که در آنها هر سطر و هر ستون، بیش از یکبار

تغییر نکرده باشد. با توجه به این نکته، می توان به سادگی درستی جدول کمترین را، که قبلاً گفتیم، تحقیق کرد.

۷۱.

یک n ضلعی محدب در نظر می گیریم، به نحوی که هیچ سه قطر آن، در یک نقطه داخلی متقاطع نباشند، اگر در آن تمام قطرهای را رسم کنیم، n ضلعی به جزءهای کوچکتری تقسیم می شود. فرض کنید، تعداد سه ضلعیهایی که بدست می آید مساوی P_3 ، تعداد چهارضلعیها مساوی P_4 ، ... و تعداد k ضلعیها مساوی P_k باشد. مسأله به اینجاست منجر می شود که حاصل جمع زیر را بدست آوریم:

$$N = P_3 + P_4 + \dots + P_k$$

ابتدا تعداد کلی نقطه های داخلی را، که محل برخورد قطرهای یک n ضلعی محدب هستند، معین می کنیم. برای این منظور توجه می کنیم که هر چهار رأس n ضلعی، یک چهارضلعی محدب تشکیل می دهد که قطرهای آن در داخل n ضلعی یکدیگر را قطع می کنند. از آنجا که

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \text{ به چهار نقطه را به } n \text{ رأس می توان،}$$

طریق جدا کرد (امتحان کنید!)، بنابراین همه قطرهای n ضلعی به اندازه $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ نقطه برخورد داخلی می دهند.

حالا مجموع کل زاویه های چندضلعیهای را که در تقسیم n ضلعی بدست می آید، پیدا می کنیم. معلوم است که در هر نقطه داخلی برخورد قطرهای، ۴ زاویه به وجود می آید که روی هم ۳۶۰ درجه اند؛ علاوه بر آنها، باید زاویه هایی را هم به حساب آورد که رأس آنها بر یکی از رأسهای n ضلعی منطبق است. بنابراین داریم:

$$[P_3(3-2) + P_4(4-2) + \dots + P_k(k-2)] \times 180^\circ = \quad (1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \times 360^\circ + (n-2) \times 180^\circ$$

تعداد کلی رأسهای چند ضلعیهای تقسیم را پیدا می کنیم. هر نقطه

داخلی برخورد قطرها ، رأس چهار چند ضلعی تقسیم است ، و هر يك از رأسهای n ضلعی مفروض ، برای $(n-2)$ چند ضلعی ، بنابراین :

$$3P_3 + 4P_4 + \dots + kP_k = \quad (2)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \times 4 + n(n-2)$$

از رابطه (۱) بدست می آید :

$$3P_3 + 4P_4 + \dots + kP_k - 2N = \quad (3)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \times 2 + (n-2)$$

از مقایسه رابطه های (۲) و (۳) ، بعد از تبدیلیهای ساده ، بدست می آید :

$$N = \frac{(n-1)(n-2)(n^2 - 3n + 12)}{24}$$

و در حالت خاص ، وقتی که $n=20$ باشد ، داریم : $N=5016$.
 ۷۲. قطرهای مربع را رسم کنید و با استفاده از قضیه فیثاغورث ثابت کنید که مجموع مورد نظر مساوی واحد است .

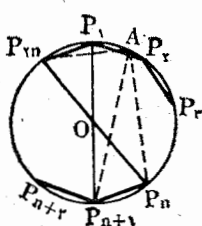
۷۳. به ترتیب داریم :

$$\begin{aligned} x^8 + x^4 + 1 &= (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4 = \\ &= (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + \\ &\quad + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1) \end{aligned}$$

۷۴. ثابت می کنیم ، لااقل ۹۷ نفر از دانش آموزان وجود دارد ، که هر کدام از آنها با ۹۹ شرکت کننده بقیه آشنا است . فرض کنیم که هر ۱۰۰۰ دانش آموز با هم آشنا نباشند . در این صورت دو نفر A و B پیدا می شود که یکدیگر را نمی شناسند . چهار نفر از شرکت کنندگان را در نظر می گیریم که A و B هم بین آنها باشند ، مثل A ، B ، X و Y .

طبق شرط، بین این چهار نفر يك نفر وجود دارد که با سه نفر دیگر آشنا است. این يك نفر یا X است و یا Y ، زیرا A و B همدیگر را نمی‌شناسند. مثلاً فرض می‌کنیم که X با A ، B و Y آشنا باشد. همین استدلال را در مورد گروه چهار نفری A ، B ، X و Z به کار می‌بریم، معلوم می‌شود که یا X با A ، B و Z آشناست و یا Z با A ، B و X ؛ یعنی به هر صورت X با Z آشنایی دارد. بنابراین X با همه شرکت کنندگان در اجتماع آشناست. به این ترتیب در هر گروه چهار نفری که شامل A و B باشد، دانش‌آموزی وجود دارد که با همه شرکت کنندگان دیگر آشناست. از اینجا نتیجه می‌شود که به جز A و B حداکثر يك دانش‌آموز دیگر پیدا می‌شود که با همه شرکت کنندگان در اجتماع ریاضی، آشنا نیست.

۷۵. اگر چنین تقسیم‌بندی ممکن باشد، تعداد کل ضلعهای مثلثهای سیاه به اندازه ۱۰ واحد از تعداد ضلعهای مثلثهای سفید بیشتر می‌شود، از طرف دیگر هردوی این عددها، باید مضربی از ۳ باشند و این دو وضع متناقض یکدیگر را رد می‌کنند.



شکل ۴۲

۷۶. مسأله را در حالت کلی و برای چند ضلعی منتظمی که تعداد ضلعهایش زوج باشد، حل می‌کنیم. برای هر رأس چند ضلعی، رأس دیگری وجود دارد که با مرکز دایره در يك امتدادند (شکل ۴۲). بنابراین

$$\begin{aligned} AP_1^2 + AP_2^2 + \dots + AP_{\frac{n}{2}}^2 &= \\ &= (AP_1^2 + AP_{\frac{n}{2}+1}^2) + (AP_2^2 + \\ &+ AP_{\frac{n}{2}+2}^2) + \dots + (AP_n^2 + AP_{\frac{n}{2}}^2) = \\ &= (2R)^2 + \dots + (2R)^2 = 4nR^2 \end{aligned}$$

برای چند ضلعیهای منتظمی هم، که تعداد ضلعهای آنها فرد باشد، همین نتیجه بدست می‌آید: مجموع مربعات وترهایی که نقطه‌ای از دایره محیطی را به رأسهای n ضلعی منتظم وصل می‌کند، برابر است با $4nR^2$.

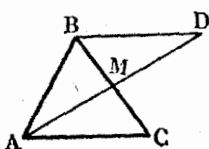
ولی اثبات حکم در این حالت، مشکل تر است.

۷۷

چون حاصلضرب هشت رقمی است، عدد مفروض نمی تواند به صفر ختم شده باشد. حاصلضرب به ۱۰۰۰ قابل قسمت است، بنابراین یکی از عددها به ۱۲۵ و دیگری به ۸ قابل قسمت است. عددهای مضرب ۱۲۵، که به صفر ختم نشده باشند، به یکی از عددهای سه رقمی ۱۲۵، ۳۷۵، ۶۲۵، ۸۷۵ ختم می شوند و جوابهای زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{array}{r} \overline{abcd} = 6125 \quad 6375 \quad 4625 \quad 4875 \\ \overline{dcba} = 5216 \quad 5736 \quad 5264 \quad 5784 \end{array}$$

چهار جواب دیگر هم، با تبديل $abcd$ و $dcba$ به یکدیگر بدست می آید.



شکل ۴۳

۷۸ در مثلث ABC ، میانه AM را از طرف M ، به اندازه خودش امتداد می دهیم تا به نقطه D برسد. توجه می کنیم که داریم: $BD = AC$. حالا می توانید مثلث ABM را بسازید (شکل ۴۳).

۷۹

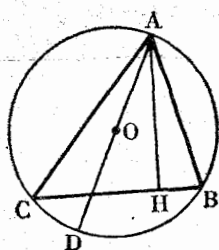
فرض کنید، A نقطه مشترک دایره ها باشد. A را به مرکز همه دایره ها وصل کنید و کوچکترین زاویه ای که تشکیل می شود، در نظر بگیرید. اگر این زاویه AO_1 باشد، ثابت کنید، پاره خطی که مرکزهای O_1 و O_2 را بهم وصل می کند، بطور کامل داخل یکی از دایره ها قرار دارد.

۸۰

فرض کنید عدد m_1 ، که از رقمهای مفروض تشکیل شده است، بر عدد m_2 ، از همین نوع، قابل قسمت باشد ($m_2 < m_1$). در این صورت $m_1 - m_2$ هم بر m_2 قابل قسمت می شود. از طرف دیگر می دانیم که اگر مجموع رقمهای دو عدد با هم برابر باشند، تفاضل آنها بر ۹ قابل قسمت است؛ بنابراین باید $m_1 - m_2$ بر $9m_2$ قابل قسمت باشد. ولی $9m_2$ عددی هشت رقمی است و تفاضل دو عدد هفت رقمی

نمی‌تواند بر آن قابل قسمت باشد.

- ۰۸۱ دایره محیطی مثلث را رسم کنید، AO را امتداد دهید تا این دایره را در D قطع کند و توجه کنید که دو زاویه ABC و ADC برابرند (شکل ۴۴).



شکل ۴۴

- ۰۸۲ سه حالت در نظر می‌گیریم:

(۱) $x \leq 0$. در این حالت همه جمله‌هایی که چند جمله‌ای را تشکیل داده‌اند، غیر منفی‌اند و بنابراین:

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 \geq 1 > 0$$

(۲) $0 < x < 1$. در این حالت داریم:

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = (1 - x) + x^4(1 - x^5) + x^{12} > 0$$

(۳) $x \geq 1$. داریم:

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 =$$

$$= x^9(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1 \geq 1 > 0$$

۰۸۳ سمت راست تساوی را تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{199} + \frac{1}{200} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{100} = 1 + \frac{1}{3} +$$

$$+ \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200} -$$

$$- 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{199} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots - \frac{1}{200}$$

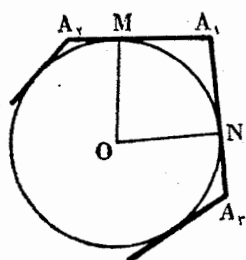
۰۸۴ به ۱۵ طریقه.

۰۸۵ یکی از خط‌های طولی یا عرضی تخته را در نظر می‌گیریم. این خط،

تخته را به دو قسمت تقسیم می کند، که در هر کدام از آنها، تعداد خانه ها، عددی زوج است. تعداد زوجی از این خانه ها، به وسیله استخوانهایی پوشیده شده اند (ممکن است این تعداد صفر باشد)، که خط مرزی را قطع نمی کنند. بنابراین خط مرزی، تنها می تواند تعداد زوجی از استخوانها را: ۵، ۲، ۴، و یا بیشتر، قطع کند. تعداد کل اینگونه خطهای طولی و یا عرضی مساوی ۱۰۲ است، و برای آنکه هریک از استخوانها را قطع کنند، لااقل ۲۰۴ استخوان لازم است. ولی روی تخته ما بیش از ۲۰۰ استخوان وجود ندارد.

۸۶. مثلث ACD را دور نقطه C به اندازه ۶۰ درجه دوران می دهیم، به نحوی که نقطه D بر نقطه E قرار گیرد.

۸۷. دانش آموز A_1 را در نظر می گیریم. فرض کنید او مسأله های a_1 و a_2 را حل کرده باشد. از او می خواهیم که مثلاً مسأله a_2 را توضیح دهد. تنها يك دانش آموز دیگر، مثلاً A_2 ، پیدا می شود که همراه با A_1 مسأله a_2 را حل کرده است. از او می خواهیم، مسأله دیگری را که حل کرده است، مثلاً a_3 ، شرح دهد. این روش را ادامه می دهیم. ثابت کنید که دیر یا زود به دانش آموزی می رسیم که همراه با A_1 ، مسأله a_1 را حل کرده باشد. اگر بعد از آن، باز هم دانش آموزانی باقی مانده باشند، چگونه باید ادامه دهیم؟



شکل ۴۵

۸۸. نقطه A_1 را رأسی از ده ضلعی و M و N را نقطه های تماس ضلعهای A_1A_2 و A_1A_3 با دایره محاطی می گیریم (شکل ۴۵). ثابت کنید:

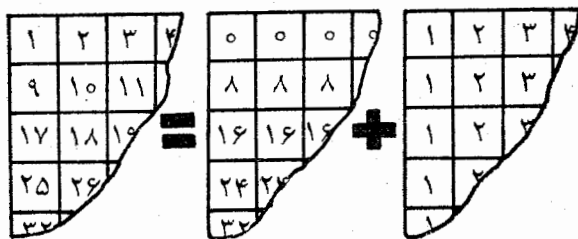
$$\angle MON = 180^\circ - \angle A_1$$

با استفاده از این مطلب، ده ضلعی متشابه با ده ضلعی مفروض رسم کنید.

۸۹. دو عدد $\frac{n(n+1)}{2}$ و $\frac{(n+20)(n+21)}{2}$ ، به يك رقم ختم

می‌شوند، زیرا تفاضل آنها بر ۱۰ قابل قسمت است.

۹۰. هر يك از عددهایی را كه در خانه‌های صفحه شطرنج نوشته شده است، به صورت مجموع دو عدد دیگر، به نحوی كه در شكل ۴۶ دیده می‌شود، می‌نویسیم. اگر ۸ رخ به نحوی باشند، كه یکی دیگری را نزند، در هر ردیف افقی و در هر ردیف قائم، تنها يك رخ قرار خواهد گرفت. بنابراین مجموع عددهای خانه‌هایی كه شامل رخها



شكل ۴۶

هستند، همیشه برابر است با:

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 8) + (0 + 8 + 16 + \dots + 56) = 260$$

۹۱. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)\dots(2n-1)2n &= \frac{1 \times 2 \times \dots \times 2n}{1 \times 2 \times \dots \times n} = \\ &= 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} = \\ &= 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) \times 2^n \end{aligned}$$

۹۲. از نقطه B، عمودی بر AC فرود می‌آوریم

(شكل ۴۷)؛ مثلثهای CBD، CEH و

AHE متشابه‌اند. با توجه به اینکه

نقطه‌های O و E به ترتیب وسط ضلعهای

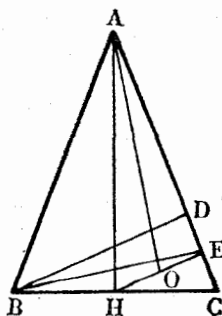
CD و HE هستند، مثلثهای BEC و

AHO متشابه می‌شوند. چون AH بر BC

عمود است، AO هم بر BE عمود می‌شود.

۹۳. اگر طول محیط دایره را واحد بگیریم و

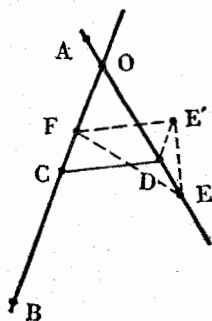
هیچ تغییری در کلی بودن مسأله نخواهد



شكل ۴۷

منتظم ستاره‌ای رسم شده است، تصور ۲۰۳ ضلعی منتظم ستاره‌ای را هم بدست می‌دهد. ثابت کنید که در يك چنین شکلی، هیچ سه ضلعی از يك نقطه عبور نمی‌کند.

۹۵. دایره‌ها را C_1, C_2, C_3, C_4 و C_5 می‌نامیم. فرض کنید دایره‌های C_1, C_2, C_3 و C_4 در نقطه A ، دایره‌های C_1, C_2, C_3 و C_5 در نقطه B ؛ دایره‌های C_1, C_2, C_4 و C_5 در نقطه C متقاطع باشند. اگر A, B و C سه نقطه متمایز باشند، به این معناست که دایره‌های C_1 و C_2 ، سه نقطه مشترك دارند؛ و در این صورت باید این دودایره برهم منطبق باشند. ولی در چنین حالتی، نقطه برخورد دایره‌های C_1, C_3, C_4 و C_5 متعلق به دایره C_2 خواهد بود. و اگر مثلاً نقطه‌های A و C برهم منطبق باشند، در این صورت نقطه A برای همه دایره‌ها مشترك خواهد بود.



شکل ۵۰

۹۶. ثابت می‌کنیم نزدیکترین موضع دو متحرك، نسبت به هم، وقتی است که در نقطه‌های C و D ، که به يك فاصله از O قرار دارند، واقع باشند (شکل ۵۰). فرض کنید دو متحرك در نقطه‌های دیگری، مثل E و F واقع باشند. پاره‌خط DE' ، قرینه DE نسبت به CD ، را می‌سازیم. می‌بینیم که:

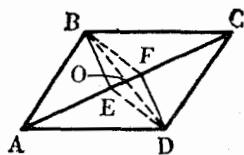
$$EF > FE' = CD$$

(زیرا EF ، وتر مثلث قائم‌الزاویه $FE'E$ است.)

اگر $\angle AOB = 90^\circ$ ، $AO = a$ و $BO = b$ و $a > b$ باشد، حداقل فاصله بین دو متحرك بعد از $\frac{a+b}{2v}$ واحد زمان بعد از شروع حرکت، بدست می‌آید و این فاصله برابر است با $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$.

۹۷. چون مساحت دو مثلث ABC و ACD برابر است، BE و DF دو ارتفاع این مثلثها برابرند (شکل ۵۱). بنابر این، چهار ضلعی

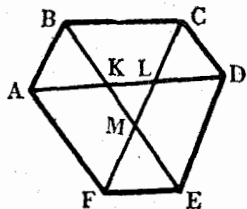
$BEDF$ متوازی الاضلاع است و قطرهای آن در نقطه O ، یکدیگر



شکل ۵۱

را نصف می کنند، یعنی $BO = OD$. به همین ترتیب می توان ثابت کرد که $AO = OC$. بنابراین قطرهای چهارضلعی $ABCD$ ، در نقطه تلاقی یکدیگر را نصف می کنند و چهار ضلعی مفروض ، متوازی الاضلاع است .

(b) فرض می کنیم ، قطرهای AD ، BE و CF در یک نقطه بهم نرسند . نقطه های K ، L ، M را ، به ترتیب



شکل ۵۲

نقطه های تلاقی AD و BE ، AD و FC و BE و FC باشند . برای مشخص بودن وضع ، حالتی را در نظر می گیریم که قطر FC ، مثلث KDE را قطع کند (همین حالت در شکل ۵۲ نشان داده شده است .) اگر مساحت شش ضلعی $ABCDEF$ را S بگیریم ،

مساحت هر یک از چهار ضلعیهای $ABEF$ و $ABCD$ ، طبق شرط ،

مساوی $\frac{S}{4}$ می شود؛ از اینجا به سادگی دیده می شود که مساحت دو

مثلث ABK و KDE برابرند . به همین ترتیب مساحت دو مثلث

CLD و ALF و همچنین مساحت دو مثلث FME و BMC هم

برابر می شود.

می دانیم ، مساحت دو مثلثی که در یک زاویه برابرند ، بر نسبت حاصل-

ضرب دو ضلع این زاویه است ، بنابراین :

$$AK.BK = DK.EK ,$$

$$CL.DL = AL.FL ,$$

$$LM.EM = BM.CM$$

از ضرب این تساویها ، در یکدیگر ، بعد از جابجا کردن بعضی عاملهای

طرف دوم ، بدست می آید :

$$AKBK.CL.DL.FM.EM = AL.BM.CM.DK.FL.EK$$

ولی هر يك از عاملهای سمت راست این تساوی، از عامل نظیرش در سمت چپ، بزرگتر است و بنابراین این تساوی ممکن نیست.

۹۸. به سادگی دیده می شود که هر دو نقطه روی شکل ۶ را می توان به وسیله خط شکسته ای به هم وصل کرد که بیش از ۵ پاره خط نداشته باشد. خط شکسته ای را در نظر بگیرید که دو نقطه مربوط به عددهای ۱ و ۱۸ را به هم وصل کرده باشد. ثابت کنید که در دو انتهای یکی از پاره خطهای این خط شکسته، عددهایی قرار دارد، که اختلاف آنها از ۳ بزرگتر است.

۹۹. $m > n$ (a) فرض کنید. عدد $2^m - 1$ را تجزیه کنید و ثابت کنید که بر $2^n + 1$ قابل قسمت است.

(b) شرط لازم. فرض کنید، عددهای $2^m - 1$ و $2^n - 1$ نسبت به هم اول باشند. ثابت می کنیم که در این صورت m و n نسبت به هم اولند. از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض می کنیم که m و n مقسوم علیه مشترک $1 \neq d$ داشته باشند، به نحوی که داشته باشیم: $m = dm_1$ و $n = dn_1$. در این صورت، دو عدد مفروض را می توان چنین نوشت:

$$2^{dm_1} - 1 = (2^d)^{m_1} - 1,$$

$$2^{dn_1} - 1 = (2^d)^{n_1} - 1$$

یعنی هر دو عدد بر $2^d - 1$ قابل قسمت اند و این متناقض با شرط ماست.

لم. اگر m و n نسبت به هم اول باشند، می توان عددهای طبیعی u و v را طوری پیدا کرد که داشته باشیم:

$$mu = nv + 1$$

اثبات. باقیمانده عددهای

$$m, 2m, 3m, \dots, (n-1)m$$

را بر n پیدا می کنیم. هیچکدام از این عددها بر n قابل قسمت نیستند و بنابراین، باقیمانده ها مخالف صفرند. ثابت می کنیم بین این

باقیمانده‌ها، دو عدد مساوی هم وجود ندارد. در حقیقت، اگر مثلاً عددهای pm و qm ($p < q$)، در تقسیم بر n ، باقیمانده‌های مساوی بدهند، باید تفاضل آنها $(q-p)m$ بر n قابل قسمت باشد، که ممکن نیست، زیرا $q-p < n$. بنابراین بین باقیمانده‌ها، همهٔ عددهای از ۱ تا $n-1$ وجود دارد و همین مطلب هم، درستی لم را ثابت می‌کند.

به مسئلهٔ خود بر می‌گردیم. اثبات کافی بودن شرط را به طریق «برهان خلف» می‌دهیم. فرض می‌کنیم، عددهای m و n نسبت به هم اول باشند، ولی دو عدد $2^m - 1$ و $2^n - 1$ مقسوم علیه مشترکی مثل $1 \neq D$ داشته باشند. با توجه به حکم لم، می‌توان دو عدد u و v را طوری پیدا کرد که داشته باشیم: $mu = nv + 1$. بنابراین

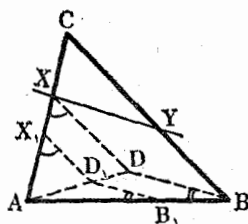
$$2^{mu} - 1 = 2^{nv+1} - 1 = 2 \times 2^{nv} - 1 = 2(2^{nv} - 1) + 1$$

عدد $2^{mu} - 1 = (2^u)^m - 1$ بر $2^u - 1$ ، یعنی بر D ، قابل قسمت است. به همین ترتیب، عدد $2^{nv} - 1$ هم بر D قابل قسمت می‌شود. به این ترتیب در تساوی $2^{mu} - 1 = 2(2^{nv} - 1) + 1$ ، مقدار سمت چپ بر D قابل قسمت است، ولی عدد سمت راست بر D قابل قسمت نیست. و این، فرض را نقض می‌کند.

۱۰۰. یکی از جوابها را می‌توان به این طریق بدست آورد که پاره خطی موازی دو قاعده و محدود به دوساق طوری رسم کنیم، که طول آن واسطهٔ هندسی بین دو قاعدهٔ دوزنقهٔ اصلی باشد.

۱۰۱. X و Y را، نقطه‌های مطلوب

می‌گیریم (شکل ۵۳). لوزی $XYBD$ را می‌سازیم و A را به D وصل می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود که مثلث AXD متساوی‌الساقین است و زاویهٔ رأس آن $X = C$.



شکل ۵۳

بنابراین برای رسم XY می‌توان اینطور عمل کرد: نقطهٔ X_1 را به دلخواه، روی AC انتخاب می‌کنیم و مثلث

متساوی الساقین AX_1D_1 را، با شرط زاویه رأس $X_1 = C$ ، می سازیم. سپس روی AB ، نقطه B_1 را طوری پیدا می کنیم که داشته باشیم:

$$D_1B_1 = X_1D_1$$

BD را موازی B_1D_1 رسم می کنیم تا خط AD_1 را در D قطع کند، سپس DX را موازی D_1X_1 می کشیم تا AC را در X قطع کند. بالاخره XY را موازی DB رسم می کنیم تا به CB در Y برخورد کند. از تشابه دوشکل ADB و AD_1B_1 و همچنین دوشکل ADX و AD_1X_1 ثابت می شود که:

$$AX = XY = YB$$

۱۰۲. توجه کنید که باید $a \leq 1$ ، $b \leq 1$ ، $c \leq 1$ باشد. ثابت کنید که برای

هر مقدار x ، نامساوی $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ برقرار است، از آنجا نتیجه بگیرید:

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) \leq \frac{1}{64}$$

ولی اگر سه نامساوی مفروض را در هم ضرب کنیم (چرا این ضرب ممکن است؟)، بدست می آید:

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) > \frac{1}{64}$$

۱۰۳. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ پرانتز سمت چپ را باز کنید و از نامساوی استفاده کنید.

b برای مشخص بودن وضع، فرض کنید $|a| \geq |b|$ ، در این صورت

$$|a+b| \leq 2|a|$$

یعنی

$$(a+b)^{100} \leq 2^{100} \times a^{100} < 2^{100}(a^{100} + b^{100})$$

۱۰۴. اگر میله BC را دور نقطه B بچرخانیم،

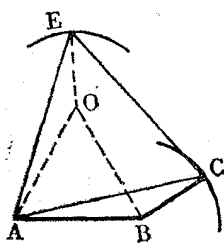
نقطه C روی محیط یک دایره حرکت می کند. با استفاده از این مطلب که اگر

AC را به اندازه 60° درجه دور نقطه A

دوران دهیم، نقطه E بدست می آید، ثابت

کنید که نقطه E هم روی دایره ای حرکت

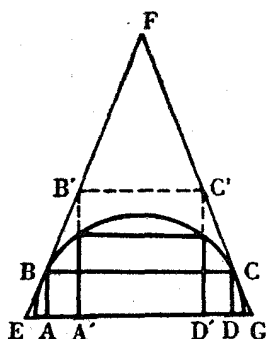
می کند. روی این دایره، نقطه ای پیدا



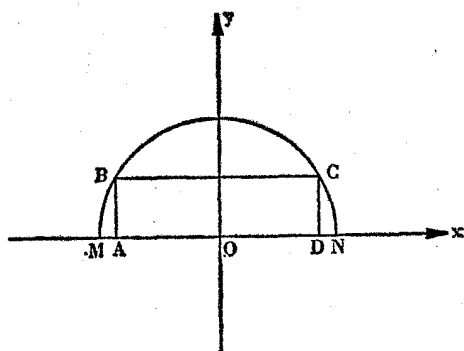
شکل ۵۴

کنید که بیشترین فاصله را از B داشته باشد (شکل ۵۴).
جواب: حداکثر مقدار BE برابر است با $a + b$ و در این حالت داریم:

$$\angle ABC = 120^\circ$$



شکل ۵۵



شکل ۵۶

۱۰۵. فرض کنید، در مستطیل $ABCD$ ، ضلع AD مساوی چهار برابر ضلع AB باشد. از نقطه‌های B و C ، مماسهایی بر نیم‌دایره رسم کنید، همه مستطیل‌های محاط در مثلث EFG ، محیط‌های مساوی دارند (شکل ۵۵) (مثلاً $ABCD$ و $A'B'C'D'$ در

شکل ۵۵). این مسأله را به طریق تحلیلی هم می‌توان حل کرد. مرکز نیم‌دایره را مبدا مختصات و امتداد قطر MN را محور طول می‌گیریم (شکل ۵۶). اگر مختصات یکی از

رأس‌های مستطیل محاطی را $C(x, y)$ فرض کنیم، باید $p = 2x + y$ حداکثر شود (p مساوی نصف محیط مستطیل است). از طرف دیگر (x, y) در معادله دایره، یعنی $x^2 + y^2 = R^2$ صدق می‌کند، که با توجه به تساوی $y = p - 2x$ ، به صورت زیر در می‌آید:

$$x^2 + (p - 2x)^2 = R^2 \Rightarrow 5x^2 - 4px + p^2 - R^2 = 0$$

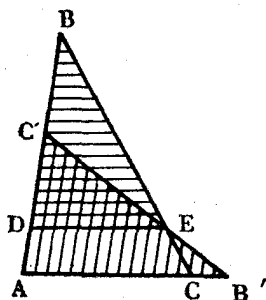
برای اینکه این معادله درجه دوم، ریشه‌های حقیقی داشته باشد، داریم:

$$4p^2 - 5(p^2 - R^2) \geq 0 \implies p \leq R/\sqrt{5}$$

یعنی $2p$ ، محیط مستطیل محاط در نیمدایره ، حداکثر مساوی $2R/\sqrt{5}$ می شود ، و این مقدار وقتی خواهد بود که داشته باشیم :

$$2x = \frac{4P}{5}, y = \frac{P}{5}$$

و همانطور که می بینیم طول مستطیل ، چهار برابر عرض آن است.



شکل ۵۷

۱۰۶. فرض کنید $AB > AC$. مثلث $AB'C'$

را متشابه با مثلث ABC و به نحوی

که $AC < AB' < AB$ باشد ، روی

ضلع AC از مثلث ABC می سازیم

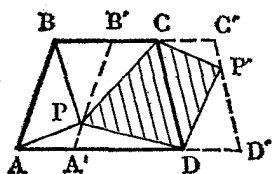
(شکل ۵۷ را ببینید). از نقطه E ،

محل برخورد BC و $B'C'$ ، خط

DE را به موازات AC رسم می کنیم.

مثلثهای $AB'C'$ و DBE ، مثلثهای

مورد نظر مسأله اند .



شکل ۵۸

۱۰۷. از نقطه P ، پاره خط $A'B'$ را مساوی

و موازی AB رسم می کنیم (شکل

۵۸). متوازی الاضلاع $AA'B'B$ را

روی ضلع CD به نحوی قرار می دهیم

که نقطه A بر نقطه C و نقطه B

بر نقطه D قرار گیرد .

۱۰۸. فرض کنیم ، به هر ترتیبی که دایره کوچکتر را روی دایره بزرگتر قرار

دهیم ، کمتر از ۱۰۰ قطاع همرنگ برهم منطبق شوند ، در این صورت

تعداد کل حالت هایی که دو قطاع همرنگ بر یکدیگر منطبق شوند ، از

200×100 کمتر می شود. از طرف دیگر ، اگر دایره کوچکتر را ،

یک دور کامل ، دور مرکزش بچرخانیم ، هر قطاع دایره کوچکتر

صد بار قطاع همرنگ خود را می پوشاند و صد بار بر قطاع ناهمرنگ

خود قرار می گیرد . بنابراین تعداد کل حالت هایی که یک قطاع دایره

کوچکتر بريك قطاع همرنگ خود در دایره بزرگتر ، قرار گیرد ، مساوی ۲۰۰×۱۰۰ می شود و این تناقض ، فرض اول را منتفی می کند .

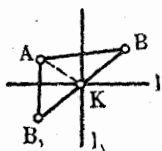
۱۰۹. دستگاه مفروض را می توان به این صورت نوشت :

$$\begin{cases} x + y = a - z \\ \frac{a - z}{xy} = - \frac{a - z}{az} \end{cases}$$

فرض می کنیم $z \neq a$ ، در این صورت ، دستگاه چنین می شود :

$$\begin{cases} x + y = a + (-z) \\ xy = a(-z) \end{cases}$$

در اینجا نتیجه می شود که عددهای a و $(-z)$ عبارتند از ریشه های معادله دومی که ضمناً ریشه هایش مساوی x و y است . بنابراین یکی از عددهای x و y مساوی a می شود .



شکل ۵۹

۱۱۰. B_1 را قرینه B نسبت به K می گیریم و دو

خط l و l_1 را عمود بر هم از نقطه K

می گذرانیم (شکل ۵۹). ثابت کنید مجموع

فاصله های دو نقطه A و B از خط l برابر

است با تصویر AB_1 یا AB بر l_1 (هر کدام

که خط l را قطع می کنند). حالا به سادگی معلوم می شود که اگر

خط l را عمود بر خط AB یا AB_1 (هر کدام که بزرگتر است) ، رسم

کنیم ، مجموع فاصله های A و B از آن حداکثر خواهد شد. همچنین

اگر خط l را از یکی از ضلعهای AK یا BK از مثلث ABK (آنکه

ارتفاع وارد بر آن کوچکتر است) ، بگذرانیم ، مجموع فاصله های A

و B از آن ، حداقل می شود .

۱۱۱. a فرض کنیم x ، y و z یکی از سه عدد جواب باشد. ثابت کنید

که اگر x و y ، مقسوم علیه مشترکی مثل h داشته باشند ، z هم بر

h قابل قسمت است . با استفاده از این مطلب ، مسأله را درحالتی

در نظر بگیرید که سه عدد x ، y و z دو به دو ، مقسوم علیه

مشترکی نداشته باشند ، در این صورت ، چون $x + y$ بر z قابل قسمت است ، $x + y + z$ هم بر z قابل قسمت می شود . به همین ترتیب $x + y + z$ بر x و بر y و در نتیجه بر xyz قابل قسمت می شود . برای سهولت امر ، فرض می کنیم $x \leq y \leq z$. ثابت کنید که $x = 1$ ، $y \leq 2$ ، $z \leq 3$. به این ترتیب مسأله دارای سه رشته جواب می شود :

$$A) \quad x = k$$

$$B) \quad x = l$$

$$C) \quad x = m$$

$$y = k$$

$$y = l$$

$$y = 2m$$

$$z = k$$

$$z = 2l$$

$$z = 3m$$

که در آنها k ، l و m ، عددهای طبیعی دلخواهند .

(b) می توان فرض کرد $a \geq b \geq c$. اگر $c = 1$ باشد ، به سادگی معلوم می شود که یا $a = b = 1$ ، یا $a = 2$ و $b = 1$ ، یا $a = 3$ و $b = 2$ است . حالا فرض می کنیم $c \geq 2$. ثابت می کنیم که در این حالت ، سه عدد با هم فرق دارند ، یعنی $a > b > c$. طبق شرط مسأله داریم .

$$ab + 1 = Kc , \quad ac + 1 = Lb , \quad bc + 1 = Ma$$

(K ، L ، M ، عددهایی صحیح اند) . اگر این تساویها را در هم ضرب کنیم ، به این نتیجه می رسیم که می توان عدد صحیحی مثل N پیدا کرد ، به نحوی که داشته باشیم :

$$ab + bc + ac + 1 = Nabc$$

یعنی در هر حالت داریم :

$$ab + bc + ac + 1 \geq abc$$

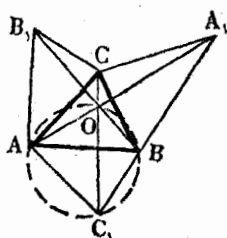
از طرف دیگر با توجه به شرط $a \geq b \geq c$ ، باید داشته باشیم :

$$abc \leq ab + bc + ac < 3ab$$

از آنجا $c < 3$ ، یعنی $c = 2$ بدست می آید . حالا دیگر می توان استدلال را ادامه داد و $a = 7$ ، $b = 3$ را بدست آورد .

۱۱۲. هریک از ۲۵ عدد ، ۲۵ بار در جدول نوشته شده است ، ضمناً هر عدد در خارج قطر اصلی به تعداد زوج تکرار شده است ، بنابراین روی

قطر افقی ، هریک از عددها باید به تعداد فرد تکرار شده باشد .
این امر هم تنها وقتی ممکن است که هر عددی که روی قطر اصلی
نوشته شده است ، تنها یکبار تکرار شود .



شکل ۶۰

۱۱۳. روی ضلعهای مثلث ABC ، مثلثهای متشابه

ABC_1 ، BCA_1 و CAB_1 را بازآویزهای

$\widehat{H} - 180^\circ$ و $\widehat{K} - 180^\circ$ و $\widehat{M} - 180^\circ$

رسم می‌کنیم (شکل ۶۰). ثابت کنید که

نقطه O بر محل برخورد خطهای CC_1 و

BB_1 قرار دارد. برای این منظور، تحقیق

کنید که نقطه O بر دایره‌های محیطی مثلثهای

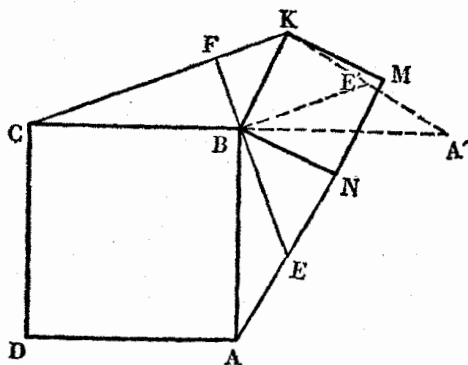
ABC_1 و AB_1C قرار دارد .

۱۱۴. مثلث ABN را دور نقطه B به اندازه 90° درجه دوران دهید تا

BN بر BK قرار گیرد و ثابت کنید که شکل $CBA'K$ يك مثلث

است که BE' وسط دو ضلع آنها را بهم وصل کرده است. از اینجا نتیجه

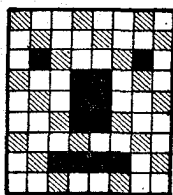
بگیرید که FBE يك خط راست است (شکل ۶۱).



شکل ۶۱

۱۱۵. بعضی از خانه‌های شکل را ، آنطور که در شکل ۶۲ نشان داده شده

است، هاشور می‌زنیم. این خانه‌ها به نحوی انتخاب شده‌اند ، که هر



شکل ۶۲

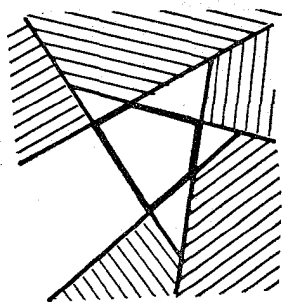
مستطیل سه خانه‌ای ، تنها شامل يك خانه هاشور خورده باشد. اگر تقسیم ۶۰ خانه شکل ، به مستطیل‌های سه خانه‌ای ممکن باشد ، باید ۲۰ مستطیل بدست آید ، در حالی که تعداد خانه‌های هاشور خورده ، به جای ۲۰ عدد ، ۲۱ عدد است .

۱۱۶. توجه کنید که هر کدام از شکلهای نظیر شکل ۹ ، یا سه خانه سفید را می‌پوشاند و یا سه خانه سیاه را و تمام صفحه شطرنجی هم باید شامل ۲۵ عدد ، از نوع شکل ۹ باشد .

۱۱۷. همیشه می‌توان دو نقطه A و B پیدا کرد ، به نحوی که فاصله آنها حداقل باشد. کوچکترین دایره از دایره‌های قابل رسم ، از این دو نقطه A و B و یکی از $(n-2)$ نقطه دیگر می‌گذرد و در داخل آن هم ، هیچیک از بقیه نقطه‌ها قرار نگرفته است. (ثابت کنید!)

۱۱۸. خانه‌هایی را که در دو ردیف افقی بالا و پایین قرار گرفته‌اند ، خانه‌های جانبی و خانه‌های دو ردیف دیگر را خانه‌های میانی می‌نامیم . اگر اسب از خانه جانبی حرکت کند ، تنها می‌تواند در یکی از خانه‌های میانی قرار گیرد. اگر اسب بتواند طبق شرط مسأله از همه خانه‌ها عبور کند ، $2n$ حرکت از خانه‌های میانی به طرف خانه های جانبی خواهد داشت. روشن است که $2n$ حرکت بقیه را باید از خانه‌های جانبی به طرف خانه‌های میانی انجام دهد. در هر حرکت اسب ، رنگ خانه عوض می‌شود ، یعنی از خانه سفید به خانه سیاه و از خانه سیاه به خانه سفید می‌رود. به این ترتیب معلوم می‌شود که دور ردیف خانه جانبی افقی باید از يك رنگ و دو ردیف خانه میانی از رنگ دیگر باشند . و این ممکن نیست .

۱۱۹. با روش استقراء ریاضی عمل می‌کنیم . برای $n=4$ ، حکم مسأله درست است . فرض می‌کنیم که حکم برای $n=k$ درست باشد . مجموعه $k+1$ نقطه را طبق فرض مسأله ، در نظر می‌گیریم . k



شکل ۶۳

نقطه از این $k + 1$ نقطه را،
انتخاب می کنیم. طبق فرض
استقراء، این k نقطه،
رأسهای يك k ضلعی محدب
را تشکیل می دهند، ثابت
کنید که $(k + 1)$ امین نقطه،
نمی تواند در داخل این k
ضلعی واقع باشد. برای این
منظور، k ضلعی را، به وسیله

قطرهایی که از يك رأس آن عبور می کنند، به مثلثهایی تقسیم کنید.
ضلعهای k را ضلعی، شبیه شکل ۶۳، ادامه می دهیم. برای سهولت
کار حالت $k = 5$ را روی شکل در نظر گرفته ایم. ثابت کنید که نقطه
 $(k + 1)$ ام، نمی تواند، در هیچکدام از ناحیه های هاشور خورده
قرار گیرد. و وقتی هم که این نقطه در یکی از ناحیه های هاشور
نخورده واقع باشد، همه نقطه ها، رأسهای يك $(k + 1)$ ضلعی محدب
را تشکیل می دهند.

۱۲۰. ثابت کنید که مکعب هر عدد طبیعی را می توان به یکی از سه صورت
 $9k$ ، $9k + 1$ و $9k - 1$ نوشت (k عددی طبیعی است). از اینجا
نتیجه بگیرید که عددهای به صورت $9k + 4$ و $9k + 5$ را نمی توان
به صورت مجموع مکعبهای سه عدد متوالی نوشت.

۱۲۱. داریم:

$$10^n - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{\text{مرتبۀ } n} = 9 \times \underbrace{11 \dots 1}_{\text{مرتبۀ } n}$$

و بنابراین:

$$10^n + 18n - 1 = 9(\underbrace{11 \dots 1}_{\text{مرتبۀ } n} + 2n)$$

ثابت می کنیم که مقدار داخل پرانتز بر ۳ قابل قسمت است، می دانیم
که باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۳ برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع

رقمهای آن عدد بر ۳. اگر باقیمانده عدد n بر ۳ را مساوی α فرض کنیم، می توان عدد $\underbrace{11 \dots 1}_n$ را چنین نوشت:

$$\underbrace{11 \dots 1}_n = 3l + \alpha$$

و از آنجا

$$\underbrace{11 \dots 1}_n + 2n = 3(l + 2k + \alpha)$$

۱۲۲. $N = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}$ فرض می کنیم و عددی را که از حذف رقم سمت راست N بدست می آید، X می گیریم: $X = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$. از آنجا بدست می آید:

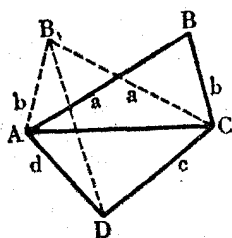
$$N = 10X + a_n, \quad N_1 = X + 2a_n$$

عدد N_1 را می توان چنین نوشت:

$$N_1 = 2(10X + a_n) - 19X$$

حالا دیگر اثبات درستی حکم مسأله، ساده است.

۱۲۳. از B و C به موازات AC و AB رسم کنید، تا به کمک مثلث ABC متوازی الاضلاعی بدست آید و ثابت کنید $b + c > 2m_a$ (میانۀ وارد بر ضلع a ، و b و c دو ضلع دیگر مثلث اند).



شکل ۶۴

۱۲۴. $ABCD$ را چهارضلعی مفروض، با ضلعهای

a, b, c و d فرض کنید (شکل ۶۴).

روی قطر AC ، مثلث AB_1C را، با

ضلعهای $AB_1 = b$ و $CB_1 = a$ می سازیم.

مساحت های چهار ضلعی های $ABCD$ و

AB_1CD با هم برابرند. از طرف دیگر

مساحت AB_1CD از مجموع مساحت های

مثلث های DAB_1 و DB_1C تشکیل شده است که به ترتیب نمی توانند

از $\frac{1}{2}bd$ و $\frac{1}{2}ac$ تجاوز کنند (زیرا، مثلاً مساحت مثلث DAB_1

برابر است با $(\frac{1}{2}bd \cdot \sin(B_1AD))$.

۱۲۵. این جوابها قابل قبول است :

۳۰۸۰۱۰۳، ۳۰۲۰۳۰۳، ۳۰۶۰۶۰۳، ۳۰۰۰۸۰۳،

۳۰۵۰۲۰۳، ۳۰۹۰۵۰۳، ۳۰۳۰۷۰۳

۱۲۶. از قانون محاسبه باقیمانده تقسیم بر ۹ استفاده کنید .

۱۲۷. مقسوم را به این صورت بنویسید :

$$a^{101}(a^{-100} + a^{-99} + \dots + a^{-2} + a^{-1})$$

۱۲۸. a فرض می کنیم چنین سطری از ۵۰ عدد حقیقی، با شرطهای مسأله،

وجود داشته باشد. از شرطهای مسأله نتیجه می شود که مجموع

هر چهار عدد پشت سرهم، باید منفی باشد. گروهی از ۲۸ عدد پشت

سرهم در نظر می گیریم. این ۲۸ عدد را می توان به ۷ گروه چهارتایی

تقسیم کرد، که در این صورت باید مجموع آنها منفی باشد. از

طرف دیگر اگر آنها را به ۴ گروه هفت تایی تقسیم کنیم، باید

مجموعی مثبت داشته باشند. و این دو نتیجه، یکدیگر را نقض می کنند.

b اگر مثلاً یازده عدد زیر را چهار مرتبه پشت سرهم تکرار کنیم :

$$۵، -۵، -۵، -۵، -۵، ۴، ۴، ۴، ۴، ۴، ۴، ۴، ۴، ۴، ۴$$

و سپس به دنبال آنها شش بار عدد ۴ را بنویسیم، در شرطهای مسأله

صدق خواهد کرد.

۱۲۹. $10a + b$ را عدد دو رقمی مورد نظر فرض کنید a و b رقمهای

این عددند : $a \neq b$. باید این معادله را حل کنیم :

$$(10a + b)^2 = (a + b)^3$$

هر دو طرف این تساوی، عددی مانند N را معین می کنند، که هم

مربع کامل و هم مکعب کامل است. اگر یکی از عاملهای اول این عدد

را با توان k در نظر بگیرید، k باید به ۲ و ۳ قابل قسمت باشد.

بنابراین می توان نوشت : $N = n^6$ ، که در آن n عددی است

صحیح. از اینجا نتیجه می شود که عدد دو رقمی $10a + b$ باید

مکعب کامل باشد و تنها یکی از دو ۲۷ و ۶۴ چنین خاصیتی دارد.

با آزمایش ساده ، معلوم می شود که $\frac{c}{a}$ با شرطهای مسأله نمی سازد و بنابراین تنها جواب مسأله ، عدد ۲۷ است .

۱۳۰. دو طرف معادله اول را در y ضرب ، سپس دو معادله را از هم کم کنید .

۱۳۱. فرض کنید ، در تقسیم عدد اول p بر ۳۰ ، خارج قسمت مساوی a و باقیمانده تقسیم مساوی عدد b شود ، یعنی داشته باشیم :
 $p = 30a + b$. حالا ، b را عددی غیر اول می گیریم . چون هر عدد غیر اول کوچکتر از ۳۰ ، مقسوم علیه مشترکی با عدد ۳۰ دارد (امتحان کنید!) ، باید $p = 30a + b$ بر چنین مقسوم علیه مشترکی ، قابل قسمت باشد؛ در حالی که ، طبق فرض ، p عددی است اول .
 ۱۳۲. n امین عدد رشته فیبوناچی را a_n می گیریم . در این صورت ، طبق تعریف داریم :

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, \dots, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \dots$$

و ما بطور اضافی فرض می کنیم $a_0 = 0$ ، که در این صورت خواهیم داشت : $a_2 = 1 + a_0$. چند خاصیت از رشته عددهای فیبوناچی را ثابت می کنیم :

(۱) برای هر مقدار k و l داریم :

$$a_{k+1} = a_{k+1-1} + a_{k+1-2} \quad (1)$$

این اتحاد با روش استقراء ریاضی ، روی k ، ثابت می شود . تساوی (۱) به ازای $k=0$ ، به تساوی واضح $a_1 = a_1$ و به ازای $k=1$ به رابطه اصلی $a_2 = a_1 + a_0$ منجر می شود .

فرض کنید ، رابطه (۱) برای $k-1$ و k درست باشد ، در این صورت :

$$\begin{aligned} a_{k+1+1} &= a_{k+1} + a_{k+1-1} = a_k a_{1-1} + a_{k+1} a_1 + \\ &+ a_{k-1} a_{1-1} + a_k a_1 = a_{1-1} (a_k + a_{k-1}) + a_1 (a_{k+1} + \\ &+ a_k) = a_{1-1} a_{k+1} + a_1 a_{k+2} \end{aligned}$$

(۲) به ازای هر مقدار k و n ، عدد a_{kn} بر a_k قابل قسمت است . این خاصیت را می توان به سادگی و با به کار بردن استقراء ریاضی روی n ، و با استفاده از رابطه (۱) ثابت کرد .

(۳) هر دو عدد متوالی ، در رشته فیوناچی ، نسبت به هم اولند .
 زیرا ، اگر فرض کنیم دو عدد مجاور a_k و a_{k+1} ، مقسوم علیه
 مشترك $1 \neq l$ را داشته باشند ، از رابطه $a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$
 نتیجه می شود که a_{k-1} هم بر l قابل قسمت است . به همین ترتیب ،
 چون a_k و a_{k-1} بر l قابل قسمت اند ، a_{k-2} هم بر l قابل قسمت
 می شود . اگر این استدلال را ادامه بدهیم ، بالاخره به این نتیجه
 می رسیم که a_1 و a_2 هم ، باید بر $1 \neq l$ قابل قسمت باشند ، که ممکن
 نیست .

حالا ، بزرگترین مقسوم علیه مشترك a_{1000} و a_{770} را پیدا می کنیم .
 طبق خاصیت (۱) :

$$a_{1000} = a_{770} a_{229} + a_{771} a_{228}$$

اگر a_{770} و a_{1000} ، مقسوم علیه مشتركی مساوی r داشته باشند ،
 در این صورت (با توجه به خاصیت ۳) ، باید a_{228} هم بر r قابل
 قسمت باشد . از طرف دیگر داریم :

$$a_{770} = a_{690} a_{79} + a_{691} a_{80}$$

با توجه به خاصیت (۲) ، a_{690} بر a_{228} و بنابراین بر r قابل قسمت
 است ، به این ترتیب a_{80} هم باید بر r قابل قسمت باشد . از رابطه

$$a_{228} = a_{228} a_9 + a_{229} a_{10}$$

می توان ، به همان ترتیب ، نتیجه گرفت که a_{10} هم بر r قابل قسمت
 است . ولی با توجه به خاصیت (۲) ، a_{1000} و a_{770} بر a_{10} قابل
 قسمت اند ، بنابراین a_{10} بزرگترین مقسوم علیه مشترك آنها می شود .
 به همین ترتیب ، می توان ثابت کرد که بزرگترین مقسوم علیه مشترك
 دو عدد a_m و a_n برابر است با a_s ، که در آن s عبارت است از بزرگترین
 مقسوم علیه مشترك دو عدد m و n . برای این منظور ، باید از يك
 رشته تساوی استفاده کرد ، که از راه پیدا کردن بزرگترین مقسوم
 علیه مشترك دو عدد m و n به طریق اقلیدس (روش نردبانی) ، بدست
 می آید .

۱۳۳. فرض کنید که A و C ، رأسهای زاویه های منفرجه ، در چهارضلعی

$ABCD$ باشند. قبلاً ثابت کنید که نقطه‌های A و C داخل دایره‌ای قرار دارند که به قطر BD رسم شده است.

۱۳۴. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که بتوان، عدد اول p را به دو نوع مختلف، به صورت مجموع مربعات دو عدد نوشت:

$$p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

که در آن $a > b$ ، $c > d$ و $a > c$ می‌گیریم. داریم:

$$p^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$$

که آنرا می‌توان به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$p^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2,$$

$$p^2 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$$

و چون داریم:

$$(ac + bd)(ad + bc) = (a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab = p(ab + cd)$$

بنابراین $ac + bd$ یا $ad + bc$ بر p قابل قسمت است. اگر $ac + bd$ بر p قابل قسمت باشد، از اولین بیان p^2 ، نتیجه می‌شود:

$ad - bc = 0$ یا $ad = bc$ و یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ، چون $a > c$ است، از

تناسب اخیر نتیجه می‌شود که $b > d$ ، یعنی $a^2 + b^2 > c^2 + d^2$ متناقض با فرض است.

و اگر $ad + bc$ بر p قابل قسمت باشد، از دومین بیان p^2 نتیجه

می‌شود: $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$ و از آنجا $d > c$ ، درحالی که فرض کرده بودیم

$c > d$. در این حالت هم به تناقض برخورد کردیم.

۱۳۵. a و b را به ترتیب رقمهای اول و آخر عدد مورد نظر می‌گیریم، در

این صورت خود عدد را می‌توان به صورت $\overline{a...b}$ و مقلوب آنرا به

صورت $\overline{b...a}$ نوشت. طبق فرض مسأله داریم: $\frac{\overline{a...b}}{\overline{b...a}} = k$ ، که

در آن k عبارت است از عددی صحیح و مخالف واحد. از مفهوم

مسئله می توان فهمید که $a \neq 0$ و $b \neq 0$ روشن است که $k < 10$ ،
 ببینیم چه رابطه ای بین a و b وجود دارد.

اولاً از رابطه $\overline{b...a} = \frac{a...b}{k}$ دیده می شود که: $b = \left[\frac{a}{k} \right]$ (اینجا

و از این به بعد، $\left[\frac{m}{n} \right]$ به معنی قسمت صحیح عدد $\frac{m}{n}$ است، یعنی

کوچکترین عدد صحیحی که از $\frac{m}{n}$ تجاوز نکند).

ثانیاً رقم آخر حاصلضرب ak برابر است با b .

چون $b \neq 0$ است، $a \geq k$ می شود (به عبارت دیگر $\left[\frac{a}{k} \right] \neq 0$).

جدول I را تشکیل می دهیم که در هر خانه آن $\left[\frac{a}{k} \right]$ و رقم آخر

حاصلضرب a و k گذاشته شده است. ما تنها به مقادیری از a و k

احتیاج داریم که به ازای آنها، در خانه، دو رقم مساوی بدست آید.

جدول I نشان می دهد که ، مسئله تنها در حالت $a = 8$ ، $k = 4$ ،
 $b = \left[\frac{a}{k} \right] = 2$ یا در حالت $a = 9$ ، $k = 9$ ، $b = 1$ می تواند

جواب داشته باشد. هریک از این دو حالت را بطور جداگانه بررسی
 می کنیم. (جدول I را در صفحه ۱۲۱ به بینید).

$a = 8$ ، $b = 2$ ، $k = 4$ فرض می کنیم. c و d را به ترتیب رقم
 دوم و رقم ماقبل آخر عدد می گیریم. در این صورت

$$\frac{8c...d2}{2d...c8} = 4$$

به سادگی معلوم می شود که $d = \left[\frac{c}{4} \right]$ و ضمناً رقم آخر عدد $4c + 3$

مساوی d است. جدول II را تشکیل می دهیم ، که در آن، در سطر

۱. اگر شرط $b \neq 0$ را حذف کنیم، مساله جوابهای زیادی از نوع $aba \circ aba \circ \circ$ پیدا
 می کند و رده بندی همه جوابها مشکل می شود.

جدول I

	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۲	۴							
۳	۱	۶	۹					
۴	۱	۱	۲	۶				
۵	۲	۱	۱	۰	۵			
۶	۲	۱	۱	۱	۰	۶		
۷	۳	۲	۱	۱	۱	۲	۹	
۸	۳	۲	۱	۱	۱	۱	۶	۴
۹	۴	۲	۲	۱	۱	۱	۱	۲
	۴	۳	۲	۱	۱	۱	۱	۱

دوم، مقادیر $\left[\frac{c}{4} \right]$ و در سطر سوم، رقم آخر عدد $pc + 3$ ،
نوشته شده است.

جدول II

c	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
I	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۲	۲
II	۳	۷	۱	۵	۹	۳	۷	۱	۵	۹

جدول ، مقادیر $c=7$ ، $d=1$ بدست می دهد . رقم سوم را e و رقم سوم از آخر را f می نامیم ، بدست می آید :

$$\frac{87e...f12}{21f...e78} = 4$$

در اینجا $f = \left[\frac{30+e}{4} \right]$ رقم آخر عدد $4e+3$ است ، جدول III را تشکیل می دهیم :

جدول III

e	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9
II	3	7	1	5	9	3	7	1	5	9

از این جدول دوجواب بدست می آید : $e=1$ ، $f=7$ یا $e=9$ ، $f=9$. اگر جواب اول را در نظر بگیریم و بحث را ادامه دهیم ، عددی به صورت $2178...2178$ بدست می آید . از آنجا که داریم : $8712 = 4 \times 2178$ ، عدد $2178...2178$ ، تنها در صورتی در شرط مسأله صدق می کند ، که رقمهای وسط با این شرط بسازد (مثلاً اگر چند صفر در وسط قرار دهیم) .

حالت دوم : $e=9$ ، $f=9$ را در نظر می گیریم . در این حالت داریم :

$$\frac{879k...l912}{219l...k978} = 4$$

به سادگی دیده می شود که از يك طرف $l = \left[\frac{30+k}{4} \right]$ و از طرف

دیگر l برابر است با رقم آخر $4k+3$. به این ترتیب برای k و l همان دو امکانی بدست می آید که برای e و f وجود داشت (یعنی $k=1$ ، $l=7$ یا $k=9$ ، $l=9$) .

از آنچه گفتیم ، نتیجه می شود که این عددها به عنوان ساده ترین جوابها می تواند مورد قبول باشد :

۸۷۱۲ ، ۸۷۹۱۲ ، ۸۷۹۹۱۲ ، ... ، ۸۷۹۹ ... ۹۱۲ ، ...
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{s \text{ مرتبه}}$

اگر عددی با یکی از عددهای فوق شروع شود ، باید به همان عدد ختم شود ، مثلاً :

۸۷۹۱۲۰۰۸۷۱۲۸۷۱۲۰۰۸۷۹۱۲

درست به همین ترتیب می توان در مورد حالتی که $b=1$ ، $a=9$ ، $k=9$ باشد ، استدلال کرد . در این حالت ساده ترین ترکیبها چنین است :

۹۸۰۱ ، ۹۸۹۰۱ ، ۹۸۹۹۰۱ ، ... ، ۹۸۹۹ ... ۹۰۱ ، ...
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{s \text{ مرتبه}}$

مثلاً عدد زیر :

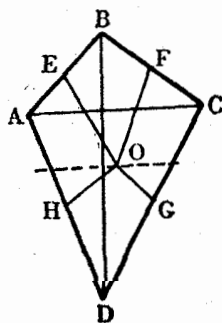
۹۸۹۹۹۰۱۰۰۰۰۰۹۸۰۱۰۰۰۰۰۹۸۹۹۹۰۱

۱۳۶ . کوچکترین عددی که در شرطهای مسأله صدق می کند ، عبارت است از $۵^6 \times ۳^{۱۰} \times ۲^{۱۵}$.

۱۳۷ . روشن است که $۲ = ۲?$. ثابت می کنیم که اگر $n > ۲$ باشد ، $n? > n$ است . عدد زیر را در نظر می گیریم :

$$n? - ۱ = ۲ \times ۳ \times ۵ \times \dots \times p - ۱$$

که در آن p ، بزرگترین عدد اولی است که از n تجاوز نمی کند . این عدد بر عدد اولی که کوچکتر یا مساوی p باشد ، قابل قسمت نیست ؛ یعنی یا این عدد اول است ، و یا بر عدد اولی بزرگتر از p قابل قسمت است ، یعنی این عدد از n بزرگتر است : $n? - ۱ > n$ و $n? > N$.



شکل ۶۵

۱۳۸ . ثابت کنید ، خطی که از وسط قطر BD ،

موازی قطر AC رسم شود (شکل ۶۵) ،

عبارت است از مکان هندسی نقطه O ، که

برای آن ، مساحت هریک از چهار ضلعیهای

$EOFB$ و $HOGD$ برابر است با یک چهارم

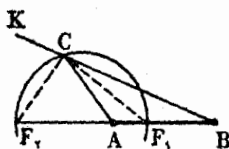
مساحت چهار ضلعی اصلی .

۱۳۹ . متذکر می شویم که نقطه M را می توان ،

با دوران PK به اندازه ۶۰ درجه ، دور نقطه P بدست آورد .
 مکان هندسی مطلوب ، عبارت است از مربعی مساوی مربع Q که از
 دوران آن به اندازه ۶۰ درجه ، نسبت به نقطه P بدست آمده است .
 ۱۴۰ . ابتدا لم زیر را ثابت می کنیم :

لم . مکان هندسی نقطه هایی که نسبت فاصله های آنها از دو نقطه
 مفروض A و B ، برابر مقدار ثابت k باشد ، عبارت است از يك دایره
 (که دایره آپولونیوس نامیده می شود) .

در حقیقت ، فرض کنید ، C نقطه ای از
 مکان هندسی مطلوب باشد . CF_1 ، نیمساز
 زاویه ACB را رسم می کنیم (شکل ۶۶) ،
 روشن است که در این صورت خواهیم داشت :



شکل ۶۶

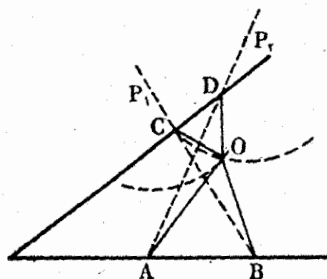
$$\frac{AC}{CB} = \frac{AF_1}{F_1B} = k \quad \text{به این ترتیب ،}$$

نیمساز زاویه ACB ، همیشه از نقطه ثابت F_1 عبور می کند . به همین
 ترتیب ، نیمساز زاویه KCA (زاویه خارجی مثلث ACB ، در رأس
 C) ، همیشه از نقطه ثابت F_2 می گذرد ، زیرا که برای آن داریم :

$$\frac{F_2A}{F_2B} = \frac{CA}{CB} = k \quad \text{از طرف دیگر ، زاویه } F_2CF_1 \text{ قائمه است .}$$

بنابراین مکان هندسی مطلوب ، عبارت است از دایره ای به قطر F_1F_2

با استفاده از این لم ، به سادگی
 می توان ، مسأله را حل کرد .
 در حقیقت ، نقطه O جایی
 است که برای آن داشته باشیم
 (شکل ۶۷) :



شکل ۶۷

$$\frac{CO}{OB} = \frac{DO}{AO} = \frac{CD}{AB} = k$$

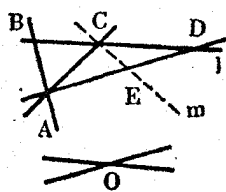
بنا بر این ، نقطه مجهول O
 عبارت است از محل برخورد

دایره‌های آپولونیوس برای زوج نقطه‌های D ، A و C ، B ، با نسبت معلوم $k = \frac{CD}{AB}$. مسأله چهار جواب دارد.

۱۴۱. سطری را در نظر می‌گیریم، که مجموع عددهای آن، حداقل باشد و مجموع عددهای همه «صلیب‌هایی» را در نظر می‌گیریم که با این سطر، درست شده‌اند. مجموع همه این مجموعه‌ها از na کمتر نیست. از طرف دیگر، مجموع همه عددهای جدول را N و مجموع عددهای این سطر را m می‌گیریم، بدست می‌آید: $N + (n-1)m \geq na$ ؛ ولی طبق فرض $m \leq \frac{N}{n}$ ، به این ترتیب:

$$N(1 + \frac{n-1}{n}) \geq na \Rightarrow N \geq a \frac{n^2}{2n-1}$$

به این ترتیب، مجموع عددهای جدول، از $a \frac{n^2}{2n-1}$ کمتر نیست. حالا باید در این باره تحقیق کرد که چگونه می‌توان، عددها را در جدول قرار داد، تا این مجموع مساوی $a \frac{n^2}{2n-1}$ شود. و ما این مطلب را به عهده خواننده می‌گذاریم.



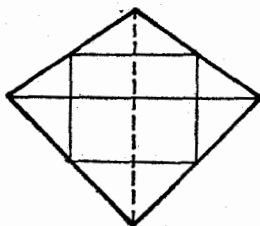
شکل ۶۸

۱۴۲. O را محل برخورد دو خط می‌گیریم و فرض می‌کنیم که همه خط‌ها از این نقطه عبور نکنند. مثلاً فرض کنید که خط l ، از نقطه O نگذرد. بین نقطه‌های تلاقی خط‌ها، که بر l واقع نیستند، نقطه‌ای را انتخاب می‌کنیم که به l نزدیک‌تر از دیگران

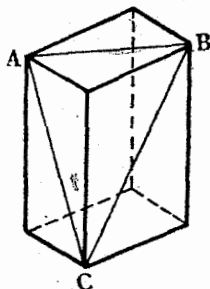
باشد، این نقطه را A می‌نامیم (شکل ۶۸). طبق شرط مسأله، از نقطه A ، لااقل سه خط عبور می‌کند. فرض کنید که این خط‌ها، خط l را در نقطه‌های B ، C و D قطع کنند، ضمناً C بین دو نقطه B و D واقع باشد. از نقطه C ، بجز l و AC ، باید یک خط دیگر، مثل m ، عبور کند. این خط، یکی از دو ضلع مثلث ABD را در نقطه E

قطع می‌کند که از A به I نزدیکتر است. ولی ما فرض کردیم که نقطه A ، نزدیکترین نقطه برخورد به I است .

۱۴۳. ثابت کنید که مساحت همه تصاویرها ، برابر است با دو برابر مساحت



شکل ۷۰



شکل ۶۹

تصویر مثلث ABC (شکل ۶۹) ، به نحوی که برای بدست آوردن حداکثر سطح در تصویر ، باید قوطی کبریت را طوری قرار داد که صفحه ABC افقی باشد .

در حالت پاکت شیر ، باید صفحه‌ای را که از وسط چهار یال دویه دو متقاطع ، عبور می‌کند ، افقی قرار داد (شکل ۷۰). این وضع وقتی برقرار می‌شود که پاکت را روی یکی از یالها ، طوری قرار دهیم که یال مقابل آن افقی باشد .

متذکر می‌شویم که رسم شکل قوطی یا پاکت روی صفحه ، درحقیقت نماینده تصویر آن است .

۱۴۴. فرض می‌کنیم روی وجه‌های مکعب ، عدد-

های a_1 ، a_2 ، a_3 ، a_4 ، a_5 و a_6 نوشته شده باشد (شکل ۷۱). عملهایی را که در

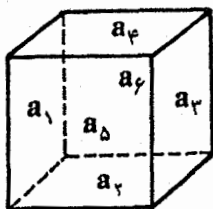
صورت مسأله ، نوشته شده است ، انجام

می‌دهیم و عددهایی که بر روی وجه‌های

مکعب دوم نوشته شده است ، بدست

می‌آوریم. روی مکعب دوم هم همین عملها

را انجام می‌دهیم و به مکعب سوم می‌رسیم تا آخر . به این ترتیب



شکل ۷۱

۲۶ مکعب بدست می آوریم که مثلاً روی مکعب دهم ، عددهایی نوشته شده است که از عددهای مکعب نهم ، با شرطهای مسأله ، بدست آمده است .

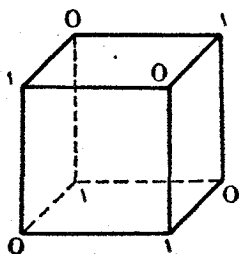
بزرگترین عددی که روی مکعب i ام ($i = ۱, ۲, \dots, ۲۶$) نوشته شده است ، M_i می نامیم . ثابت کنید :

$$M_1 \geq M_2 \geq M_3 \geq \dots \geq M_{26}$$

ولی از فرض مسأله ، معلوم می شود که $M_{26} = M_1$ و از آنجا بدست می آید :

$$M_1 = M_2 = M_3 = \dots = M_{26}$$

مکعب سوم را در نظر می گیریم . روی یکی از وجههای آن ، و مثلاً روی وجه بالایی آن ، باید عدد M_1 نوشته شده باشد . اگر شبیه استدلال مسأله ۵۱ را تکرار کنیم ، به این نتیجه می رسیم که روی چهار وجه مکعب دوم ، باید عددهای مساوی M_1 واقع باشد . به همین ترتیب می توان نتیجه گرفت که باید روی همه وجههای مکعب اول ، عدد M_1 قرار گرفته باشد . ولی طبق فرض ، همه عددهایی که روی مکعب اول قرار گرفته اند ، مساوی نیستند . تناقضی که پیدا می شود ، به معنای این است که در محاسبه مربوط به صورت مسأله ، اشتباهی شده است .



شکل ۷۲

۱۴۵. فرض کنید ، روی رأسهای مکعب ، عدد-

هایی گذاشته باشیم . عددهایی که طبق شرط مسأله بدست می آید ، در رأسهای مکعب دوم قرار می دهیم . با تکرار این عمل ، مکعب سوم را بدست می آوریم تا آخر . $m_1, m_2, \dots, m_{11}$ را کوچکترین عدد مربوط به مکعب اول ، مکعب دوم ، ... ، مکعب یازدهم ، می گیریم . بزرگترین

عدد روی هر یک از این مکعبها را به ترتیب $M_1, M_2, \dots, M_{11}$ می گیریم . با تکرار استدلال مسأله قبل نتیجه می گیریم :

$$M_1 = M_2 = \dots = M_{11} ; m_1 = m_2 = \dots = m_{11}$$

با تکیه بر استدلال مسأله ۵۱، ثابت کنید که $M_1 = 1$ ، $m_1 = 0$ و عددهای روی رأسهای مکعب به نحوی است که در شکل ۷۲ نشان داده شده است.

۱۴۶. محل برخورد دوساق AB و CD از دوزنقه را E می‌نامیم. نقطه مورد نظر یکی از دو رأس قاعده بالا (BC) است، که به E نزدیکتر است. برای اثبات، از این مطلب استفاده کنید که؛ مکان هندسی نقطه‌هایی از داخل زاویه A که مجموع فاصله‌های آنها از دو ضلع زاویه، مقداری ثابت باشد، عبارت است از پاره‌خطی عمود بر نیمساز زاویه. در حالتی که دوزنقه متساوی‌الساقین باشد، مسأله دو جواب دارد و هر کدام از رأسهای قاعده بالا را می‌توان به عنوان جواب، در نظر گرفت.

۱۴۷. a) مجموع فاصله‌ها از سه ضلع مثلث، وقتی حداقل می‌شود که این نقطه بر رأسی از مثلث منطبق باشد، که ارتفاع کوچکتر از آن می‌گذرد. b) حداکثر مجموع فاصله‌ها، وقتی است که این نقطه بر رأسی از مثلث واقع باشد، که ارتفاع بزرگتر از آن می‌گذرد. (مسأله همیشه جواب منحصر ندارد. حالت‌های مثلث متساوی‌الساقین و مثلث متساوی‌الاضلاع را بررسی کنید.)

۱۴۸. مسأله را می‌توان بطور ساده و با امتحان تمام حالت‌های ممکن، حل کرد. دو نکته زیر می‌تواند حجم محاسبه را کم کند:

- بزرگترین کسر، از بین $\frac{1}{k}$ ، $\frac{1}{l}$ ، $\frac{1}{m}$ ، می‌تواند مساوی $\frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{4}$ یا $\frac{1}{5}$ باشد.

- کسر $\frac{1}{l}$ وقتی نزدیکترین کسر به $\frac{1}{n}$ (و ضمناً کوچکتر از آن)

است که داشته باشیم: $l = n + 1$.

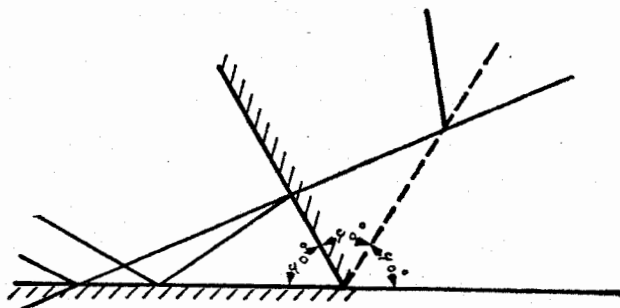
جواب: $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43}$.

قسمت دوم مسأله هم ، شبیه قسمت اول حل می شود .

جواب : بهترین تقریب نقصانی ۱ ، چنین است :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43}$$

۱۴۹. از این مطلب استفاده کنید که وقتی نور از يك خط راست ، منعكس می شود ، قرینه شعاع فرود نسبت به خط ، در امتداد مسیر نور بعد از انعکاس ، قرار می گیرد .



شکل ۷۳

جواب برای حالت زاویه ۶۰ درجه ، در شکل ۷۳ داده شده است .
نور می تواند از ضلعهای زاویه ۱ درجه ، ۱۸۰ مرتبه منعكس شود .

۱۵۰. از توضیح مسأله قبل استفاده کنید . ثابت کنید که اگر a ، b و c ، تعداد انعكسهای شعاع نور ، از سه ضلع مثلث باشد ، نامساویهای زیر درست است :

$$c - 1 \leq a + b \leq 3c + 3$$

عددهای x و y ، می توانند مقادیری را انتخاب کنند که سه عدد x ، y و ۴ در نامساویهای فوق صدق کنند .

۱۵۱. ابتدا ثابت کنید ، برای اینکه شیر بتواند به خانه اول برگردد ، باید به تعداد مساوی به راست ، پایین و چپ بالا ، یعنی روی هم $3n$ حرکت انجام دهد . ولی روی صفحه ۱۰۰ خانه وجود دارد و بنابراین شیر نمی تواند از هرخانه ، تنها یکبار عبور کند .

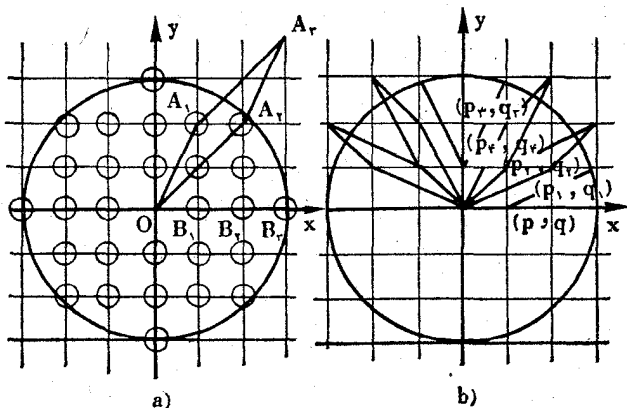
۱۵۲. اگر برای سفید ، هیچ راهی برای بردن یا مساوی کردن ، وجود نداشته باشد ، به این معناست که به هر نحوی بازی شود ، همیشه (با بازی صحیح) ، سیاه برنده است ، در چنین صورتی ، سفید می تواند دو حرکت اول خود را با اسب ، به صورت $g1-f3$ و $Kf3-g1$ انجام دهد و نوبت بازی را ، در وضع اولیه ، به سیاه واگذار کند .

۱۵۳. در دستگاه مختصاتی که در شکل ۷۴-a نشان داده شده است ، مرکز هر درخت با مختصات (x, y) معین می شود ، به نحوی که این مختصات عددی صحیحی بوده و در نامساوی $x^2 + y^2 \leq r^2$ صدق می کند . هر نقطه با مختصات صحیح را ، که از مبدا مختصات دیده شود ، نقطه ساده ، نام می گذاریم . به سادگی معلوم می شود که نقطه (p, q) ، تنها وقتی می تواند نقطه ساده باشد ، که p و q نسبت به هم اول باشند . به لم زیر احتیاج داریم :

لم ۱. اگر عددهای p و q نسبت به هم اول باشند ، می توان عددهای صحیح u_0 و v_0 را طوری پیدا کرد که داشته باشیم : $pv_0 - qu_0 = 1$. در این حالت ، جواب کلی معادله $pv - qu = 1$ به صورت :

$$v = v_0 + kp \text{ و } u = u_0 + kq$$

که در آن k عدد دلخواه صحیحی است .



شکل ۷۴

از رابطه $pv - qu = 1$ نتیجه می شود که u و v نسبت به هم اولند. نقطه (u, v) را «نقطه مجاور چپ» نقطه (p, q) می نامیم. هر نقطه ساده (p, q) دارای بی نهایت نقطه مجاور چپ می باشد، ضمناً همه آنها روی يك خط راست و به فاصله های مساوی قرار دارند.

روی نقطه های (p, q) و (u, v) ، متوازی الاضلاعی می سازیم.

لم ۲. مساحت متوازی الاضلاعی که دوی نقطه های (p, q) و (u, v) ساخته می شود، برابر است با $pv - qu$.

اثبات این لم را هم به عهده خواننده می گذاریم، می توانید از رابطه زیر استفاده کنید:

$$SOA_1A_3A_2 = SOA_1B_1 + SB_1A_1A_3B_3 - SOB_2A_2 - SB_2A_2A_3B_3$$

اگر (p, q) و (u, v) ، در نقطه «مجاور» باشند، با توجه به لم ۲، مساحت متوازی الاضلاعی که روی آنها ساخته می شود، برابر است با واحد. قطر این متوازی الاضلاع را به طول d فرض کنید. (از این به بعد هر جا از قطر صحبت می کنیم، منظور قطری از متوازی الاضلاع است که از مبدا مختصات عبور می کند). در این صورت، نقطه های (p, q) و (u, v) از این قطر به يك فاصله اند، و این فاصله برابر است با $\frac{1}{d}$.

حداقل شعاع درخت را، که به ازای آن، جنگل «بدون نور» می شود، ρ می گیریم. باید ثابت کنیم که:

$$\frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \leq \rho \leq \frac{1}{s}$$

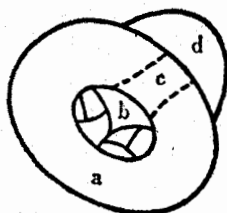
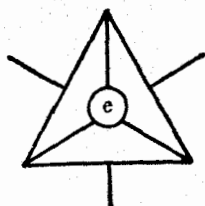
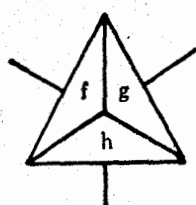
A . نقطه های $(1, 0)$ و $(1, s-1)$ «مجاورند». قطر متوازی الاضلاعی که روی این دو نقطه ساخته می شود، برابر است با $\frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$. این قطر ضمن ادامه خود، تنها می تواند به وسیله درخت های به مرکزهای $(1, 0)$ و $(1, s-1)$ متوقف شود، بنابراین باید

داشته باشیم : $p \geq \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$

B . فرض می کنیم (p, q) ، نقطه ای از دایره $x^2 + y^2 \leq s^2$ و (p, q) ، مرزی ترین نقطه «مجاور چپ» آن باشد (و این مطلب به معنای آن است که نقطه $(p + p_1, q + q_1)$ در خارج دایره مورد بررسی ما قرار گرفته است). به همین ترتیب (p_1, q_1) را مرزی ترین نقطه «مجاور چپ» (p, q) ، (p_2, q_2) را مرزی ترین نقطه «مجاور چپ» نقطه (p_1, q_1) و غیره می گیریم. بعد از چند مرحله به نقطه (p_n, q_n) می رسیم که متوازی الاضلاعهایی که روی (p, q) و (p_1, q_1) ، (p_2, q_2) و (p_3, q_3) ، ...، (p_{n-1}, q_{n-1}) و (p_n, q_n) ساخته می شود، بطور کامل دایره به شعاع s را پوشاند [شکل ۷۴ - b را ببینید که در آن $s = 3$ و $(p, q) = (1, 0)$ را پوشاند است]. قطر هریک از این متوازی الاضلاعها ، بزرگتر از s و فاصله هریک از رأسهایی که روی قطر واقع نیستند ، تا قطر ، کمتر از $\frac{1}{s}$ است . بنابراین ، درختهای به قطر $\frac{1}{s}$ ، که در نقطه های (p, q) ، (p_1, q_1) ، ...، (p_n, q_n) واقع شده اند ، هر شعاع نوری را که از نقطه صفر حرکت کرده است ، متوقف می کند ، یعنی

$$p \leq \frac{1}{s}$$

۱۵۴. می توان تنها نقشه ای را در نظر گرفت که در رأسهای آن بیش از سه کشور به هم نرسیده باشند . همچنین می توان از نقشه ای که شامل کشورهای حلقه ای شکل است ، صرف نظر کرد . در حقیقت ، اگر کشور a ، دارای قسمت حلقه ای (شکل ۷۵) و کشور b در داخل این حلقه باشد ، می توان قسمت c را از a جدا و به b وصل کرد که مرز آن به کشوری مثل d ، که خارج از حلقه است ، مربوط شود. اگر برای رنگ کردن این نقشه جدید ، ۱۲ رنگ کافی باشد ، مسلماً برای نقشه قدیم هم کافی خواهد بود. علاوه بر اینها ، می توان فرض



شکل ۷۶

شکل ۷۵

کرد که هر کشور از دو قسمت تشکیل شده باشد. در حقیقت، اگر کشور e تنها از یک قسمت تشکیل شده باشد، مسأله را می توان به مسأله رنگ آمیزی نقشه دیگری منجر کرد، که تفاوت آن با نقشه ما، تنها در این است که منطقه کوچکی در اطراف رأسی که کشورهای f و g و h به هم رسیده اند، متعلق به کشور e است (شکل ۷۶). فرض کنید، روی نقشه، به اندازه f کشور داشته باشیم که تعداد رأسهای هر کدام از آنها مساوی ۴ باشد، همچنین f کشور با پنج رأس و غیره (تعداد کل رأسها در هر دو قسمت نقشه، در نظر گرفته شده است).

تعداد کل کشورها $f = f_4 + f_5 + f_6 + \dots$ می شود. اگر تعداد مرزها را k و تعداد رأسها را I فرض می کنیم، داریم:

$$2k = 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \dots; \quad 3I = 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \dots$$

یعنی $2k = 3I$. رابطه اول، در این حالت به این صورت درمی آید:

$$2k = 3I + 2f$$

رابطه اخیر را در ۶ ضرب می کنیم، بدست می آید:

$$12f = 6k + 12I + 12f$$

یا

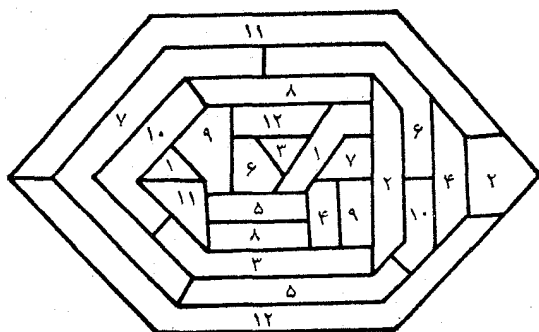
$$12(f_4 + f_5 + f_6 + \dots) = (4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \dots) + 12$$

و از آنجا بدست می آید:

$$8f_4 + 7f_5 + \dots + f_{11} = 12 + f_{12} + f_{13} + \dots$$

بنابراین، کشوری مانند a وجود دارد که بیش از ۱۱ رأس ندارد.

در کنار هر يك از دو قسمتی كه كشور a را به وجود آورده‌اند ، كشوری وجود دارد ، كه با قسمت مفروض يك مرز دارد . هر قسمت كشور a را به كشور هم مرزش ، كه با آن مرز مشترك دارد ، وصل می‌كنیم . نقشه جدیدی بدست می‌آید كه روی آن ، از تعداد كشورها ، یکی كم شده است . اگر بتوانیم این نقشه جدید را با ۱۲ رنگ مختلف ، رنگ‌آمیزی كنیم ، برای نقشه قدیم هم ، همین ۱۲ رنگ كافی خواهد بود . اگر این استدلال را ادامه دهیم ، می‌توان به نقشه‌ای رسید كه در آن بیش از ۱۲ كشور نباشد . و روشن است كه برای رنگ كردن چنین نقشه‌ای ، ۱۲ رنگ كافی است . برای اینکه معلوم شود كه همیشه ۱۱ رنگ كافی نیست ، می‌توان نقشه‌ای از ۱۲ كشور

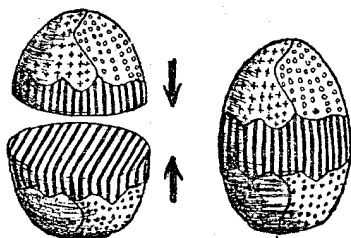


شكل ۷۷

رسم كرد كه در آن هريك از كشورها با ۱۱ كشور ديگر مرز مشترك داشته باشد (شكل ۷۷).

۱۵۵. فرض می‌كنیم كه نقشه دو

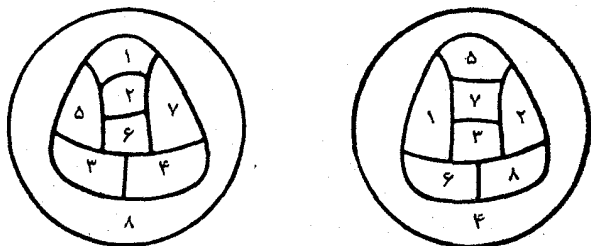
سياره راروی دو كره مصنوعی ، كه بانوارهای لاستيكي درست شده است ، نشان داده باشیم . این كره را می‌توان تغییر شكل داد ، به نحوی كه هريك از آنها به نیم‌كره‌ای تبدیل شوند و



شكل ۷۸

ضمناً دور استوا و روی قاعده مسطح نیمکره‌ها ، تنها یکی از کشورها ، قرار گرفته باشد . روشن است که در این تغییر شکل ، جای کشورها ، نسبت به هم ، تغییری نمی‌کند (شکل ۷۸).

حالا اگر این دونیمکره را ، از طرف قاعده روی هم قرار دهیم ، يك کره بدست می‌آید که برای رنگ کردن کشورهای مختلف آن ، همان شرطهای مسأله ۱۵۴ را خواهیم داشت ؛ و بنابراین برای این عمل ، ۱۲ رنگ کافی خواهد بود . از شکل ۷۹ دیده می‌شود که هفت



شکل ۷۹

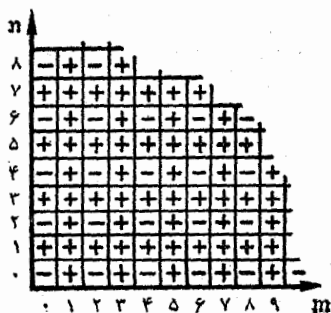
رنگ ممکن است کافی نباشد. در این شکل ۸ کشور، روی دوسپاره، نشان داده شده است که هریک از آنها ، با هفت کشور دیگر ، مرز مشترك دارند .

۱۵۶. فرض کنید در توده ، n سنگریزه وجود داشته باشد . روشن است که اگر n مساوی ۱ ، ۲ یا ۳ باشد ، آنکه بازی را شروع می‌کند ، برنده است . اگر $n = 4$ باشد ، آنکه بازی را شروع می‌کند ، به هر ترتیبی عمل کند ، برای طرف مقابل ۱ یا ۲ یا ۳ سنگریزه باقی می‌ماند و در هر حال برنده است . وقتی n مساوی ۵ یا ۶ یا ۷ باشد ، کسی که بازی را شروع می‌کند ، می‌تواند ترتیبی بدهد که برای طرف مقابل او ، ۴ سنگریزه باقی بماند . به این ترتیب برای ۷ و ۶ و ۵ $n =$ ، برد با کسی است که بازی را شروع می‌کند . اگر این استدلال را ادامه بدهیم ، معلوم می‌شود که برای $n = 8$ ، شروع کننده بازی خواهد باخت و برای حالتی که n مساوی ۹ ، ۱۰ و ۱۱ باشد ، برد با شروع کننده بازی است ، در حالت $n = 12$ ، شروع کننده بازی

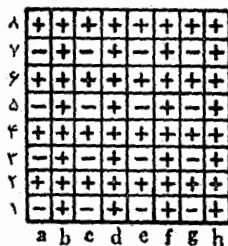
نمی تواند برد و غیره .

بطور کلی ، برای اینکه برد با کسی باشد ، باید در هر بازی ترتیبی بدهد که تعداد باقیمانده سنگریزه ها ، مضربی از ۴ باشد . شروع کننده بازی وقتی می تواند به این ترتیب عمل کند که تعداد اولیه سنگریزه ها بر ۴ قابل قسمت نباشد .

۱۵۷. a) اگر شاه در خانه a_1 واقع شود (شکل ۸۵)، شروع کننده بازی را باخته است . در این خانه ، علامت « - » را قرار می دهیم . همه خانه هایی را که از آنها ، می شود با یک حرکت ، به خانه a_1 رسید ، با علامت مثبت ، مشخص می کنیم . روشن است که این خانه ها ، برای شروع کننده بازی ، خانه های برنده است . اگر حرکتی از یک خانه A ، شاه را به یکی از این خانه های برنده برساند ، کسی که بازی را شروع می کند ، وضع را برای طرف مقابل خود ، در حالت برد قرار خواهد داد . به همین مناسبت خانه های a_3 و c_1 را با علامت منفی مشخص می کنیم ، که شروع حرکت از آنها ، برای شروع کننده ، منجر به باخت می شود . سپس در همه خانه هایی که از آنها می توان به یکی از خانه های منفی رفت ، علامت مثبت قرار می دهیم . اگر این علامتگذاری را ادامه دهیم ، به وضع علامتهای مثبت و منفی ، در شکل ۸۵ می رسم . برای اینکه ، شروع کننده بازی ، برنده شود ، باید در هر حرکت ، شاه را در خانه منفی قرار دهد (یعنی طرف مقابل را ، در وضع باخت



شکل ۸۵



شکل ۸۶

قرار دهد). شروع کننده بازی، وقتی می تواند چنین وضعی داشته باشد، که از يك خانه مثبت شروع به بازی کند.

(b) به جای هر حرکت در بازی سنگریزه ها، می توان يك حرکت در صفحه شطرنج، با قانون زیر، انجام داد: اگر يك سنگریزه، از توده اول برمی داریم، شکل را روی صفحه شطرنج، يك خانه به سمت چپ ببریم، و اگر يك سنگریزه، از توده دوم برمی داریم، شکل را روی صفحه شطرنج، يك خانه به طرف پایین ببریم. روشن است که اگر از هر توده، يك سنگریزه برداریم، شکل مربوطه، روی صفحه شطرنج، در جهت قطری به طرف پایین و چپ می رود. به این ترتیب، به همان بازی روی صفحه شطرنج، با شرطهای قسمت a، می رسمیم. وضعی که برای آن، سنگریزه ای باقی نمی ماند، متناظر می شود با وضعی که شکل، روی صفحه شطرنج، در خانه چپ پایین قرار گیرد. اگر در توده اول، m سنگریزه، و در توده دوم، n سنگریزه، وجود داشته باشد، به معنای این است که m خانه افقی و n خانه قائم داریم (شکل ۸۱) (روشن است که اگر در یکی از توده ها بیش از ۷ سنگریزه باشد، صفحه شطرنجی دارای بیش از ۸ خانه افقی یا قائم خواهد شد). با قرار دادن علامتهای مثبت و منفی (مثل حالت a)، به این نتیجه می رسم: شروع کننده بازی، وقتی برنده است که لااقل یکی از دو عدد m و n ، فرد باشد. در این صورت، بازی را باید طوری انجام دهد، که هر بار برای طرف مقابل، در هر توده تعداد سنگریزه ها، زوج باشد.

۱۵۸. a) ثابت کنید که $B_n C_n$ ، قاعده کوچکتر دوزنقه $AB_n C_n D$ ، برابر

است با $(a-b) \cdot \frac{1}{2}$. از این نتیجه می شود که چهارضلعی $AB_n C_n D$ ،

دوزنقه ای است با قاعده کوچکتر $B_n C_n$ ، که ضمناً برابر است با:

$(a - B_{n-1} C_{n-1}) \cdot \frac{1}{2}$. حالا با روش استقراء ریاضی ثابت کنید:

$$B_n C_n = \frac{a}{3} + \frac{3b-a}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

(b) روشن است که $B_n C_n$ به سمت $\frac{a}{3}$ میل می کند.

(c) روشن است که همه پاره خطهای $B_n C_n$ با هم (و با BC) ، وقتی برابرند که $a = 3b$ باشد .

۱۵۹. یکی از همین ترازوهای معمولی را انتخاب می کنیم و سنگ ترازوها را یکی پس از دیگری روی آن قرار می دهیم ، به نحوی که قبل از گذاشتن آخرین سنگ ، از ۵۰۰ گرم بیشتر نباشد ، ولی بعد از گذاشتن آن ، از ۵۰۰ گرم بیشتر شود . چون هیچکدام از سنگها از ۵۰۰ گرم تجاوز نمی کنند . وزن کلی سنگهایی که در ترازو گذاشته ایم از یک کیلو گرم بیشتر نیست . طبق فرض مسأله ، سنگهای باقی مانده از ۵۰۰ گرم تجاوز نمی کند . بنابراین وزن کل سنگها هم از ۱۵۰۰ گرم تجاوز نمی کند . مثلاً سه سنگ ۵۰۰ گرمی با شرطهای مسأله می سازد .

۱۶۰. ابتدا به تعریف یک مفهوم مهم ، به نام «خط جهانی» می پردازیم . فرض کنید ، نقطه A_t ، طبق قانونی ، روی یک صفحه حرکت کند ، این نقطه در لحظه t ، در نقطه ای مثل A_t است . اگر روی نیم خط قائم به مبدا A_t ، پاره خطی به طول t ، به طرف بالا جدا کنیم ، نقطه (A_t , t) بدست می آید . وقتی که نقطه A_t حرکت کند ، نقطه (A_t , t) هم روی یک منحنی فضایی حرکت می کند ، که «خط جهانی» برای حرکت A_t نامیده می شود . به سادگی ثابت می شود ، که اگر روی یک صفحه ، حرکت مستقیم الخط متشابهی وجود داشته باشد ، «خط جهانی» متناظر با آن هم ، یک خط راست می شود . علاوه بر آن ، دو نقطه متحرك ، تنها وقتی به هم می رسند ، که «خط جهانی» متناظر آنها ، با هم برخورد داشته باشند . با توجه به این دو نکته ساده ، خودتان اثبات مسأله را تمام کنید .

۱۶۱. تعداد تیمها را n می گیریم . ثابت کنید که n تیم ، روی هم $\frac{1}{2}n(n-1)$

بازی باید انجام دهند ، و بنابراین تعداد کل امتیازها ، مساوی

$(n-1)n$ می شود. چون سه تیم ردیف اول روی هم ۱۵ امتیاز آورده اند، بنابراین باید داشته باشیم $n(n-1) \geq 15$ و از آنجا $n \geq 5$. چون هریک از تیمهای ردیف سوم به بعد، بیش از سه امتیاز نیاورده اند، بنابراین باید داشته باشیم: $n(n-1) \leq 3(n-2) + 12$ و از آنجا: $10 \leq (n-2)^2$ و یا $n \leq 5$.

به این ترتیب $n=5$ و $n(n-1)=20$ می شود. دو تیم ردیف آخر، روی هم ۱۵ امتیاز دارند، سه امتیاز متعلق به تیم ردیف چهارم و ۲ امتیاز متعلق به تیم ردیف پنجم است.

۱۶۲. مجموع وزنهای n سنگ ترازو برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

و برای اینکه بتوان آنها را به سه قسمت با وزنهای مساوی، تقسیم کرد، لازم است که یا n یا $n+1$ بر ۳ قابل قسمت باشد. ثابت کنید که این شرط، برای مقادیر $n > 3$ ، کافی هم می باشد. طرح استدلال را می توان به این ترتیب ریخت:

برای حالت های $n=5$ ، $n=8$ و $n=9$ می توان به طور مستقیم، آزمایش کرد. حالت کلی هم منجر به یکی از این حالت های خاص می شود، به شرطی که توجه کنیم که عدد طبیعی متوالی را می توان به ۳ قسمت تقسیم کرد، به نحوی که در هر قسمت، ۲ عدد، با مجموعهای مساوی، وجود داشته باشد.

۱۶۳. از نقطه P ، خطی موازی یکی از ضلعهای زاویه رسم کنید، تا ضلع دیگر را در نقطه Q قطع کند و به کمک مثلثهای مشابه، ثابت کنید

$$\text{که مجموع } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ برابر است با } \frac{1}{PQ}.$$

با استفاده از این حکم می توان، رابطه ساده ای برای محاسبه β_c ، نیمساز زاویه C از مثلث ABC به ضلعهای $AC=b$ و $BC=a$ به دست آورد:

$$\beta_c = \frac{2abc \cos \frac{C}{2}}{a+b}$$

۱۶۴. رأسهای ۱۷ ضلعی را شماره گذاری می کنیم. یکی از چند ضلعیهای تقسیم را در نظر می گیریم و تعداد ضلعهای آنرا n می گیریم. ضلعهای این چندضلعی را ادامه می دهیم؛ امتداد این ضلعها از رأسهای ۱۷ ضلعی می گذرند، فرض می کنیم n_i تعداد خطهایی باشد که از رأس i ام عبور می کند. روشن است که

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{17} = 2n$$

چون $n_i \leq 2$ ، پس $2n \leq 34$ و $n \leq 17$.

حالا فرض می کنیم $n = 17$. مثلاً يك ۱۷ ضلعی منتظم را در نظر می گیریم، که در دایره ای به مرکز O محاط شده باشد. تمام قطرهای

این ۱۷ ضلعی را رسم می کنیم و آنرا به اندازه $\frac{360}{17}$ درجه دور

نقطه O دوران می دهیم. بعد از این دوران، چندضلعی تقسیم، که شامل نقطه O است، برخوردش منطبق می شود و بنابراین يك ۱۷ ضلعی منتظم است.

۱۶۵. می توان، در گروه اول، عددهایی را قرار داد که تعداد رقمهای مساوی ۱، در آنها عددی فرد شود، و در گروه دوم بقیه عددها را.

۱۶۶. نقطه O (شکل ۸۲)، وسط قطر DB ، یکی از نقطه های مکان است (زیرا دو مثلث DAO و AOB هم ارزند، همچنین دو مثلث DOC و

COB هم مساحت های مساوی دارند).

از نقطه O ، پاره خط POQ را

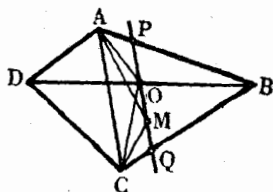
موازی AC رسم می کنیم. چون

مثلث های با قاعده AC و رأس واقع

بر PQ ، مساحت های مساوی دارند؛

این پاره خط، مکان هندسی مطلوب

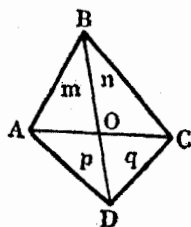
خواهد بود. ثابت کنید که هیچ



شکل ۸۲

نقطه‌ای، خارج از این پاره‌خط، نمی‌تواند جزو مکان باشد. روشن است، که اگر منظور، پیدا کردن مکان هندسی نقطه‌هایی از داخل چهارضلعی محدب باشد، به نحوی که اگر از آنجا به دو رأس دلخواه روبرو وصل کنیم، دو چهارضلعی هم‌ارز بدست آید، به‌عنوان جواب دو پاره خط بدست می‌آید: یکی پاره خطی که از وسط قطر BD ، موازی قطر AC رسم شود و دیگری پاره‌خطی که از وسط قطر AC ، موازی قطر BD رسم شود.

۱۶۷. ابتدا ثابت کنید که اگر سه سکه داشته باشیم که یکی یا دوتا از آنها تقلبی باشد، تنها با یک بار وزن کردن می‌توان، سکه‌ها را از هم جدا کرد. همچنین ثابت کنید که اگر بین چهار سکه، دو سکه تقلبی وجود داشته باشد، با دو بار وزن کردن، می‌توان آنها را از هم جدا کرد. با استفاده از این مطلب، ثابت کنید، برای اینکه بتوانیم دو سکه تقلبی را از بین ۷ سکه جدا کنیم، سه بار وزن کردن کافی است (در اولین وزن کردن، سه سکه را در یک کفه و سه سکه را در کفه دیگر ترازو بگذارید). بالاخره با استدلالی، شبیه مسأله ۲، ثابت کنید که دوبار وزن کردن، ممکن است کافی نباشد.



شکل ۸۳

۱۶۸. عدد نمایندهٔ مساحتها را به m, n, p و q

نشان می‌دهیم (شکل ۸۳). دو مثلث AOB و COB دارای یک ارتفاع اند و بنابراین مساحت‌های آنها به نسبت قاعده‌های آنها

است: $\frac{m}{n} = \frac{AO}{OC}$. به همین ترتیب به

دست می‌آید: $\frac{p}{q} = \frac{AO}{OC}$ و از آنجا:

یا $mq = pn$ و در نتیجه:

$$m \cdot n \cdot p \cdot q = (pn)^2$$

۱۶۹. وضع بازی را با تعداد چوب کبریت‌هایی که در قوطی باقی مانده و

زوج یا فرد بودن تعداد چوب کبریت‌های بازی‌کنی که نوبت حرکت با اوست، شرح می‌دهیم. جدولی را در نظر می‌گیریم (شکل ۸۴)، که از $(2n+2) \times 2$ خانه تشکیل شده باشد. وضع بازی را با قراردادن يك مهره در جدول نشان می‌دهیم، به این ترتیب که مهره را

زوج	+	-	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	+
فرد	-	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳		

شکل ۸۴

در یکی از دوخانه عمودی، که روی عدد مساوی تعداد چوب کبریت‌های باقیمانده قرار گرفته‌اند، می‌گذاریم، اگر تعداد چوب کبریت‌های کسی که نوبت بازی با اوست، زوج باشد، درخانه ردیف زوج والا درخانه ردیف فرد. مثلاً اگر مهره را درخانه «۱۱؛ فرد» بگذاریم، به این معناست که ۱۱ چوب کبریت در قوطی مانده است و تعداد کبریت‌های کسی که نوبت بازی با اوست، عددی فرد است. از آنجا که تعداد کل چوب کبریت‌ها هم فرد است، طرف مقابل هم به تعداد فرد، چوب کبریت در اختیار دارد، و بنابراین به‌هرشکلی که حرکت انجام شود، مهره در همان ردیف فرد باقی می‌ماند. به‌طور کلی، اگر مهره روی یکی از دوخانه عمودی بالای شماره فرد قرار گرفته باشد، بعد از يك حرکت در همان ردیف افقی باقی می‌ماند؛ ولی اگر مهره روی یکی از دوخانه عمودی بالای شماره زوج واقع باشد، بعد از يك حرکت، ردیف افقی خود را عوض می‌کند (یعنی از زوج به فرد یا از فرد به زوج می‌رود). طبق شرط مسأله، بازی‌کنی که برای او، مهره روی خانه‌های عمودی بالای صفر قرار گرفته است، به شرطی برنده می‌شود که بعد از حرکت، مهره در زاویه پایین واقع شود، و در غیر این صورت رقیب او برنده خواهد بود.

(a) اگر علامت‌های مثبت و منفی را روی جدول، شبیه مسأله ۱۵۷، قرار دهیم، معلوم می‌شود که خانه‌های به صورت « $1-k$ ؛ فرد»، « $6k$ ؛ فرد»، « $1+6k$ ؛ زوج» (k عددی است طبیعی)، بازی را

می بازد و بقیه خانه ها ، بازی را می برد .

(b) با همین روش ، می توان جواب را برای حالت کلی هم بدست آورد .
۱۷۰. طبق فرض مسأله ، تنها جای دو مهره ای را می توان با هم عوض کرد که یا هر دو در ردیفهای زوج ، و یا هر دو در ردیفهای فرد ، باشند . آیا به این ترتیب می توان ترتیبی داد که اولین مهره ، جای خود را با صدمین مهره عوض کند ؟

*

۱۷۱. ۹ جواب اول فوری بدست می آید :

۶۶/۶/۶	۱۱/۱/۱
۷۷/۷/۷	۲۲/۲/۲
۸۸/۸/۸	۳۳/۳/۳
۹۹/۹/۹	۴۴/۴/۴
	۵۵/۵/۵

علاوه بر آنها ، این چهار جواب هم وجود دارد :

۱۱/۱/۱۱
۱۱/۱۱/۱
۱۱/۱۱/۱۱
۲۲/۲/۲۲

بنابراین ، در جریان يك سده ، روی هم ۱۳ بار ، این وضع پیش می آید .

۱۷۲. ... ساعت ۶ عصر؛ قطار از A به B می رود و بقیه راه را در شب طی می کند . بنابراین قطاری که از B به A می آید ، باید این قسمت راه را در روز طی کند . از اینجا نتیجه می شود که قطارها باید در صبح و عصر به هم برسند . به این ترتیب : هر چند ساعت که قطار دیرتر از صبح از A خارج شود ، قطار دیگر ، همان قدر ساعت زودتر از صبح به A برمی گردد (یا هر چند ساعت که قطار زودتر از عصر به B برسد ، قطار دیگر همان قدر ساعت دیرتر از عصر باید از B خارج شود) . در این صورت ، از هر نقطه ای بین A و

B ، که قطار در يك جهت هنگام روز عبور کند ، موقع برگشتن ، هنگام شب از همان نقطه خواهد گذشت .

۱۷۳. اگر همه تراورسها ، کاج بود ، وزن کلی آنها قریب ۲۷۰ کیلوگرم می شد . اگر همه آنها بلوط بود ، وزن کلی آنها تقریباً مساوی ۴۵۰ کیلوگرم می شد .

اگرهم تعداد تراورسهای کاج و بلوط مساوی بود ، وزن تقریبی کل آنها مساوی نصف مجموع ۲۷۰ و ۴۵۰ ، یعنی ۳۶۰ کیلوگرم می شد ، که قریب ۲۴ کیلوگرم از وزن حقیقی کمتر است . ظاهراً باید يك تراورس کاج را کم کرد و به جای آن يك تراورس بلوط گذاشت . در این صورت ۴ تراورس کاج و ۶ تراورس بلوط بدست می آید و کافی است نتیجه را آزمایش کنیم :

$$4 \times 27 \frac{4}{5} = 108 + 3 \frac{1}{5} = 111 \frac{1}{5}$$

$$6 \times 45 \frac{1}{2} = 270 + 3 = 273$$

$$384 \frac{1}{5} \text{ (کیلوگرم)}$$

و می بینیم که نتیجه درست است .

البته ممکن بود که نتیجه درست نباشد ، در این صورت با توجه به نتیجه ای که بدست می آمد ، فرض را تصحیح می کردیم .

۱۷۴. محاسبه ، بدون توضیح ، روشن است :

(۱) اگر در این مسأله ، تعداد تراورسها هم داده نمی شد ، باز مسأله قابل حل بود . از وزن کل (۳۸۴ $\frac{1}{5}$ کیلوگرم) معلوم است که اولاً تعداد تراورسهای بلوط باید زوج باشد (در غیر این صورت وزن کل کسری از ۱۰ می شود نه کسری از ۵) ، ثانیاً تعداد تراورسهای کاج باید عددی به صورت ۵k-۱ باشد (تا وقتی که در $\frac{4}{5}$ ضرب می شود ، بعد از خارج کردن عدد صحیح ، $\frac{1}{5}$ بدست آید) ، که در این صورت تنها جوابهای ۴ و ۹ قابل آزمایش است ، زیرا وزن ۱۴ تراورس کاج ، از وزن کلی که به ما داده اند ، زیادتر می شود . اگر دو عدد ۴ و ۹ را برای تعداد تراورسهای کاج آزمایش کنیم ، می بینیم که تنها جواب ۴ قابل قبول است و در این صورت تعداد تراورسهای بلوط هم مساوی ۶ می شود . «مترجم»

$$\begin{array}{r} 5 \times (0 - 1) = 45 \\ 10 \times (5 - 1) = 40 \\ \hline 85 \end{array}$$

$$85 + 1 = 86$$

بنابراین ، پستی روی هم برای بردن نامه به طبقه هشتاد و ششم می رود .

این مطلب جالب است ، که در بسیاری جاها (و منجمله فرانسویها) ، طبقه دوم را طبقه اول به حساب می آورند (طبقه اول را هم کف می گویند) . در چنین صورتی ، پستی باید به طبقه صد و یکم برود (حساب کنید!) .

۱۷۵. بزرگها ۲۰٪ بیشتر از بچهها هستند ؛ بنابراین برای هر ۵ بچه ، $5 \times \frac{1}{2} = 6$ بزرگ وجود دارد ؛ در نتیجه تعداد کل افراد بر $5 + 6$ یعنی ۱۱ قابل قسمت است .

از هر ۱۳ بچه ، ۷ نفر تحصیل می کنند ، بنابراین تعداد بچهها بر ۱۳ قابل قسمت است . چون تعداد بچهها بر ۱۳ قابل قسمت است ، تعداد کل افراد هم که $\frac{11}{5}$ تعداد بچهها هستند ، بر ۱۳ قابل قسمت اند (عددهای ۱۳ و ۵ ، همچنین عددهای ۱۳ و ۷ نسبت به هم اولند) . از اینجا نتیجه می شود که تعداد تمام افراد بر $13 \times 11 = 143$ قابل قسمت است .

اگر ۱۷ نفر به طبقه های اول اضافه و ۱۵ نفر از طبقه های چهارم کم شود ، تعداد کل افراد به اندازه $17 - 15 = 2$ نفر زیاد می شود و در آن حال باید مضربی از ۴ باشد ؛ بنابراین تعداد واقعی افراد بر ۲ قابل قسمت است ، ولی بر ۴ قابل قسمت نیست (عدد ۱۱ ، که در صورت مسأله داده شده است ، مورد استفاده ای ندارد) .

اگر تعداد افرادی را که در ساختمان A زندگی می کنند ، به A نشان دهیم ، در ساختمان دوم $39 - A$ نفر و در ساختمان سوم $77 + A$ نفر ساکن خواهند بود ، بنابراین تعداد کل افراد این واحد مسکونی چنین می شود :

$$A + (A - 39) + (A + 77) = 3A + 38$$

یعنی این تعداد بر ۳ قابل قسمت نیست .

تعداد، کل افراد ، از نصف ۱۴۰۰ ، یعنی ۷۰۰ ، کمتر است .

به این ترتیب ، تعداد کل افراد این واحد مسکونی مساوی 143×2 یعنی ۲۸۶ نفر است .

143×3 قابل قبول نیست ، زیرا تعداد افراد بر ۳ قابل قسمت نیست .

143×4 قابل قبول نیست ، زیرا تعداد افراد بر ۴ قابل قسمت نیست .

143×5 قابل قبول نیست ، زیرا 143×5 مساوی ۷۱۵ می شود ، که از ۷۰۰ بیشتر است .

۱۷۶. باید تعداد عددهای پنج رقمی را پیدا کنیم ، که در هریک از آنها يك ، یا دو ، یا سه ، یا چهار ، و بالاخره پنج رقم مساوی ۵ ، وجود داشته باشد . تعداد عددهای پنج رقمی هریک از این مجموعه ها را پیدا می کنیم . عددهای هریک از این مجموعه ها ، ممکن است با ۵ رقم شروع شوند و یا با یکی از هشت رقم دیگر ؛ به این ترتیب می توان هریک از این مجموعه ها را به دو زیر مجموعه تقسیم کرد .

فرض می کنیم : α نماینده یکی از نه رقم ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹ و β نماینده یکی از ۸ رقم ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹ باشد .

I. مجموعه اول : عددهای پنج رقمی که تنها شامل يك رقم مساوی ۵ هستند . زیر مجموعه های مورد نظر این مجموعه چنین اند :

رقم اول ۵ است رقم اول ۵ نیست

صورت این عددها صورت این عددها

تعداد آنها چنین می شود : و تعداد آنها چنین می شود :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta a a a a \\ \beta a a a \alpha \\ \beta a \alpha a a \\ \beta \alpha a a a \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 5 a a a a \\ 4 \times 8 \times 9 \times 9 \times 9 = \\ = 23328 \\ 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6561 \end{array}$$

II. مجموعه دوم : عددهای پنج رقمی که شامل دو رقم مساوی ۵ هستند . دو زیر مجموعه مورد نظر این مجموعه ، چنین است :

رقم اول ۵ است رقم اول ۵ نیست

صورت این عددها و تعداد آنها : صورت این عددها و تعداد آنها :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta a a 5 5 \\ \beta a 5 a 5 \\ \beta a 5 5 a = 3888 \\ \beta 5 a a 5 \\ \beta 5 a 5 a \\ \beta 5 5 a a \end{array} \right. \quad 6 \times 8 \times 9 \times 9 = \quad \left\{ \begin{array}{l} 5 a a a 5 \\ 5 a a 5 a \\ 5 a 5 a a = 2916 \\ 5 5 a a a \end{array} \right. \quad 4 \times 9 \times 9 \times 9 =$$

III. مجموعه سوم ... ، ولی این روش محاسبه خیلی مفصل شد ، آیا نمی شود راه ساده تری برای حل این مسأله پیدا کرد ؟

این مسأله را می توان خیلی سریع تر و ساده تر حل کرد ، به شرطی که قبلاً مسأله دیگری را حل کنیم : «چند عدد پنج رقمی وجود دارد ، که در هیچ کدام از آنها ، حتی يك رقم مساوی ۵ وجود نداشته باشد؟» . این عدد به صورت $\beta a a a a$ است . تعداد این عددها برابر است با $8 \times 9^4 = 52488$. بقیه عددهای پنج رقمی ، شامل لا اقل يك رقم مساوی ۵ هستند . تعداد کل عددهای پنج رقمی مساوی 90000 است و بنابراین تعداد عددهای پنج رقمی که لا اقل یکی از رقمهای آنها ، مساوی ۵ باشد ، چنین می شود :

$$90000 - 52488 = 37512$$

یادآور می شویم ، که تعداد عددهای پنج رقمی شامل لا اقل يك رقم مساوی ۱ ، یا يك رقم مساوی ۲ و ... باشد ، نیز به همین اندازه می شود .

۱۷۷. a) قبلاً یادآور می شویم ، بزرگترین عددی که با فرض مسأله می سازد ، عبارت است از 123456789 . این تنها عدد نه رقمی است که در آن ، هر رقم بزرگتر از رقم قبل خودش می باشد . بقیه عددهای از

این نوع را می‌توان از همین عدد ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ ، با حذف يك ، دو ، ... ، یا هفت رقم آن بدست آورد (روشن است که دو ، کمترین تعداد رقمهای عددی است که می‌تواند شرط مسأله در مورد آن معنا داشته باشد .)

به این ترتیب برای تعیین تعداد عددهای n رقمی که با شرط مسأله تطبیق کند ، باید برای هر عدد صحیح n ($2 \leq n \leq 9$) ، $9 - n$ رقم از عدد نه رقمی حذف کرد ، که با C_{9-n}^9 طریق ممکن است :

C_{9-n}^9	$9 - n$	n
۱	۰	۹
۹	۱	۸
۳۶	۲	۷
۸۴	۳	۶
۱۲۶	۴	۵
۱۲۶	۵	۴
۸۴	۶	۳
۳۶	۷	۲
۵۰۲	رویهم	

با توجه به رابطه $C_n^m = C_n^{n-m}$ ، می‌توان محاسبه را ساده‌تر کرد ، به نحوی که نتیجه مورد نظر را از مجموع زیر بدست آورد :

$$C_9^0 + C_9^1 + 2C_9^2 + 2C_9^3 + 2C_9^4 = 502$$

(b) بزرگترین عددی که با شرط مسأله می‌سازد ، عبارت است از ۹۸۷۶۵۴۳۲۱۰ . بنابراین در اینجا داریم :

$$2 \leq n \leq 10$$

C_{10}^{10-n}	$10-n$	n
۱	۰	۱۰
۱۰	۱	۹
۴۵	۲	۸
۱۴۴	۳	۷
۲۱۰	۴	۶
۲۵۲	۵	۵
۲۱۰	۶	۴
۱۴۴	۷	۳
۴۵	۷	۲
۱۰۶۱	رویهم	

$$C_{10}^0 + C_{10}^1 + 2C_{10}^2 + 2C_{10}^3 + 2C_{10}^4 + C_{10}^5 = 1061$$

۱۷۸. می‌دانیم که مقدار عدد π در دستگاه عددشماري به مبنای ۱۰، به

کسر ساده $\frac{22}{7}$ بسیار نزدیک است. ولی داریم: $22 = 3 \times 7 + 1$.

بنابراین، عدد π در دستگاه عددشماري به مبنای ۷ به صورت $3/1$ نوشته می‌شود.

حالا روشن کنید که این عدد با عدد $3/14$ (در مبنای ۱۰)، چقدر کم اختلاف دارد؟

۱۷۹. ابتدا، بانک و پستخانه را، يك نقطه به حساب می‌آوریم. در این صورت تعداد مسیرها برابر است با تعداد تبدیلهای $5-1=4$ عنصر:

$$P = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

و چون در هریک از این مسیرها، می‌توان به دو صورت عمل کرد (اول به پستخانه یا اول به بانک)، باید $48 = 24 \times 2$ نوع را باهم مقایسه کنیم.

۱۸۰. راه حل نیوتون چنین است: « برای اینکه به پرسش مسأله پاسخ بدهیم. باید آنچه را که مسأله داده است، روشن و بیان کنیم.

به زبان جبری	به زبان عادی
x	سرمایه‌ای که تاجر داشته است .
$x - 100$	از این سرمایه ، در سال اول ۱۰۰ فونت
$x - 100 + \frac{x - 100}{3} =$	برای مخارج خود برمی دارد
$= \frac{4x - 400}{3}$	يك سوم آنچه که می ماند، به سرمایه اضافه می کند
$\frac{4x - 400}{3} - 100 =$	در سال دوم ، دوباره ۱۰۰ فونت خرج می کند
$= \frac{4x - 700}{3}$	
$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} =$	به آنچه که می ماند يك سوم آنرا اضافه می کند
$= \frac{16x - 2800}{9}$	
$\frac{16x - 2800}{9} - 100 =$	در سال سوم ، دوباره ۱۰۰ فونت خرج می کند
$= \frac{16x - 3700}{9}$	
$\frac{16x - 3700}{9} +$	به باقی مانده پولش يك سوم آنرا اضافه می کند
$+ \frac{16x - 3700}{27} =$	
$= \frac{64x - 14800}{27}$	
$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$	در این موقع، سرمایه اش دو برابر سرمایه اولیه می شود

به این ترتیب ، به معادله زیر می‌رسیم :

$$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$$

که با حل آن ، مقدار X بدست می‌آید.

با ضرب معادله در ۲۷ ، بدست می‌آید :

$$64x - 14800 = 54x$$

از دو طرف معادله ، $54x$ کم می‌کنیم ، می‌شود ،

$$10x - 14800 = 0 \quad \text{یا} \quad 10x = 14800$$

بر ۱۰ تقسیم می‌کنیم ، پیدا می‌شود : $x = 1480$. به این ترتیب

سرمایه اولیه تاجر مساوی ۱۴۸۰ فونت بوده است .

و این هم راه‌حلی دیگر:

اگر این تاجر ، از سرمایه خود خرج نمی‌کرد و هر سال يك سوم آنچه

داشت ، به سرمایه‌اش اضافه می‌شد ، در آخر سال $\frac{4}{3}$ سرمایه

اولیه‌اش ، پول داشت . فرض کنید ، سرمایه اولیه او x فونت باشد ،

در این صورت در آخر سال سوم ، باید روی هم این قدر داشته باشد:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 x = \frac{64}{27}x = 2\frac{10}{27}x$$

ولی طبق فرض مسأله ، او در آخر سال ، تنها دو برابر سرمایه‌اش

پول دارد ، که اختلاف آنها چنین می‌شود :

$$2\frac{10}{27}x - 2x = \frac{10}{27}x$$

از طرف دیگر در آخر سال اول ، نه تنها ۱۰۰ فونت خرج کرده است ،

بلکه $\frac{1}{3}$ این ۱۰۰ فونت هم به سرمایه‌اش اضافه نشده است ، یعنی

روی هم $100 \times \frac{4}{3}$ فونت ، در محاسبه بالا ، زیاد به حساب آمده

است .

به همین ترتیب در آخر سال دوم $100 \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}$ فونت و در آخر

سال سوم $\frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times 100$ فونت زیادتر به حساب آورده ایم.
بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{4}{3} \times 100 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times 100 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 \times 100 = \frac{10}{27} x$$

$$\frac{4}{3} \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9}\right) \times 100 = \frac{10}{27} x \quad \text{یا}$$

$$\frac{4}{27} \times 27 \times 100 = \frac{10}{27} x$$

$$x = \frac{4 + 27 \times 100}{10} = 1480$$

۱۸۱. هر سه آلیاژ از یک نوع هستند. (نسبت نقره و طلا، در هر سه، یکی است.)

۱۸۲. مسأله را می توان در ذهن حل کرد. کل پولی که مسافرها پرداخته اند، برابر است با $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ ریال؛ بنابراین، فاصله ای که تاکسی طی کرده است برابر است با

$$300(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 10) \quad (\text{متر})$$

۱۸۳. زمان برخورد دو قایق، ارتباطی به سرعت جریان آب ندارد؛ بنابراین، اگر سرعت جریان آب ۳ متر در ثانیه هم باشد، باز هم دو قایق در ساعت ۱۶ و ۴۵ دقیقه به هم می رسند.

جای برخورد دو قایق، با تغییر سرعت آب رودخانه تغییر می کند.

$$12 + \frac{2 \times 3600}{100} = 19/2 \quad \text{قایقی که از } A \text{ حرکت می کند، سرعتی مساوی } 19/2$$

$$\frac{16}{19/2} = \frac{5}{6} \quad \text{کیلومتر در ساعت دارد و بنابراین } 16 \text{ کیلومتر را در } \frac{5}{6} \text{ ساعت طی کرده است.}$$

بار دوم، این قایق تا لحظه ملاقات قایق دوم، به اندازه همین $\frac{5}{6}$ ساعت

$$12 + \frac{3 \times 3600}{100} = 22/8 \quad \text{در راه بوده است، ولی سرعتی مساوی } 22/8$$

کیلومتر در ساعت داشته است و بنابراین به اندازه $19 \times \frac{22}{8} = \frac{5}{6}$ کیلومتر طی کرده است. یعنی، وقتی که سرعت جریان آب ۳ متر در ثانیه باشد، دو قایق در ۱۹ کیلومتری A یکدیگر را ملاقات می کنند.

همانطور که دیده می شود، برای حل مسأله، احتیاجی به سرعت قایق دوم نیست. ولی با در دست داشتن سرعت قایق دوم، می توان،

فاصله C را تا B بدست آورد، طبق حل قسمت اول، لحظه ملاقات، $\frac{5}{6}$ ساعت،

بعد از شروع حرکت دو قایق می باشد و در این مدت، قایق

دوم به اندازه $9 = \frac{5}{6} \times 10$ کیلومتر راه، رفته است. بنابراین،

ملاقات در ۹ کیلومتری B انجام می شود و ضمناً فاصله دو نقطه A

و B هم مساوی $25 = 9 + 16$ کیلومتر است (البته، قسمت اخیر

را متکی بر این فرض گرفتیم که دو قایق، یکی از A به طرف B و دیگری

از B به طرف A، در یک زمان حرکت کرده باشند).

۱۸۴. در این مسأله، تنها دستگاه «سنگ - سنگ» مورد مطالعه است و

وضع آنها نسبت به هم سنجیده می شود (نه نسبت به زمین)؛ بنابراین،

مقدار شتاب ثقل و یا اصلاً وجود یا عدم وجود آن، برای حل

مسأله بی تفاوت است. به این ترتیب، فاصله بین دو سنگ را h سانتیمتر

می گیریم و فرض می کنیم که یکی از آنها با سرعت v سانتیمتر در

ثانیه به طرف دیگری حرکت می کند. روشن است که بعد از $t = \frac{h}{v}$

ثانیه به آن می رسد.

ولی اگر بخواهیم، جای برخورد دو سنگ را پیدا کنیم، به تمام

دستگاه مفروض احتیاج داریم؛ اگر شتاب دستگاه را g سانتیمتر بر

ثانیه ثانیه، بگیریم، کافی است جای برخورد را با محاسبه فاصله ای

که سنگ آزاد در t ثانیه طی می کند، بدست آوریم، که برابر است

با $\frac{1}{2}gt^2$. بنابراین دو سنگ در ارتفاع $\frac{1}{2}gt^2 - h$ به هم می رسند.

این مسأله ، اساساً شبیه مسأله حرکت در رودخانه (مسأله ۱۸۳) است ، که در آنجا هم دستگاه بطور متشابه جابجا می شود .

۱۸۵. در این مسأله هم ، سرعت جریان آب (اگر جریانی وجود داشته باشد) ، هیچ نقشی ندارد . از لحظه ای که جعبه به آب انداخته شد ، کشتی از آن دور شده است . از ساعت ۱۳ و ۳۰ دقیقه تا ساعت ۱۴ و ۴۵ دقیقه ، یعنی ۱ ساعت و ۱۵ دقیقه طول کشید تا کشتی به جعبه برخورد . بنابراین ، در لحظه ای که کشتی برگشت ، همین ۱ ساعت و ۱۵ دقیقه از جعبه دور شده بود . به این ترتیب جعبه ۱ ساعت و ۱۵ دقیقه قبل از ساعت ۱۳ و ۳۰ دقیقه ، یعنی ساعت ۱۲ و ۱۵ دقیقه به آب انداخته شده بود . و در این لحظه ، از سه نفری که مورد ظن بودند ، تنها خانم براون می توانست جعبه را به آب انداخته باشد .

۱۸۶. فرض می کنیم : زمان حرکت در فاصله AC ، مساوی t_A دقیقه و زمان حرکت در فاصله CB ، مساوی t_B دقیقه باشد . در این صورت ، زمان حرکت از A به B (یا از B به A) ، مساوی $t_A + t_B$ دقیقه و زمان لازم برای يك رفت (یا برگشت) ، که آنرا نیم دور می نامیم ، مساوی $t = t_A + t_B + ۳$ دقیقه می شود .

اتوبوس از کنار نقطه C به طرف B در ساعت ۹ و ۸ دقیقه و يك بار دیگر در ساعت ۱۴ و ۴ دقیقه می گذرد ؛ بنابراین در ۲۹۶ دقیقه (از ۹ و ۸ دقیقه تا ۱۴ و ۴ دقیقه) ، چند دور کامل زده است . اگر تعداد دورهای کامل را x بگیریم ، $۲x$ مرتبه نیم دور (رفت یا برگشت) می شود و در نتیجه

$$۲xt = ۲۹۶ \Rightarrow t = \frac{۲۹۶}{۲x} = \frac{۱۴۸}{x}$$

اتوبوس ساعت ۱۱ و ۲۸ دقیقه از A خارج شده است و سپس در ساعت ۱۳ و ۱۶ دقیقه به B رسیده است . بنابراین ، اگر به ۱۰۸ دقیقه (از ۱۱ و ۲۸ دقیقه تا ۱۳ و ۱۶ دقیقه) ، ۳ دقیقه ای را که باید در B توقف کند ، اضافه کنیم ، معلوم می شود که ۱۱۱ دقیقه ، زمان لازم برای تعداد فردی از نیم دورها است ، یعنی :

$$(2y+1)t = 111 \Rightarrow t = \frac{111}{2y+1}$$

و از آنجا به این رابطه، بین x و y می‌رسیم:

$$\frac{148}{x} = \frac{111}{2y+1} \Rightarrow 3x = 8y + 4$$

چون x و y عددهایی صحیح‌اند، بنابراین x مضربی است از ۴. این جدول را تشکیل می‌دهیم:

x	۰	۴	۸	۱۲	...
y	$\frac{1}{2}$	۱	$2\frac{1}{2}$	۴	...
t	∞	۳۷	$18\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{3}$	...

مقادیر $x=0$ و $x=8$ ، قابل قبول نیست، زیرا به ازای آنها برای y ، مقادیر غیر صحیح بدست می‌آید. $x=12$ ، و همچنین مقادیر بعد از آن برای x ، قابل قبول نیست، زیرا در این حالت $t = 12\frac{1}{3}$ دقیقه برای نیم دور و $24\frac{2}{3}$ دقیقه برای دور کامل بدست می‌آید. در حالی که کارمند صندوق پس‌انداز در فاصله زمانی ۵۴ دقیقه ندیده است که اتوبوسی از جلو او عبور کند؛ بنابراین $x=4$ ، $y=1$ ،
 $t = 37'$ و $t_A + t_B = 34'$.

اتوبوس، در ساعت ۹ و ۸ دقیقه از کنار نقطه C عبور کرده است، سپس در ساعت ۱۱ و ۲۸ دقیقه از A خارج شده است. در این فاصله زمانی، اتوبوس چنین عمل کرده است:

فاصله CB را طی کرده است: t_B دقیقه

در ایستگاه B توقف کرده است: ۳ دقیقه

$2p+1$ نیم‌دور را طی کرده است: $37(2p+1)$ دقیقه

بنابراین باید داشته باشیم:

$$t_B + 74p + 40 = 140$$

بالاخره ، اتوبوس در ساعت ۱۱ و ۲۸ دقیقه از A خارج شده است و سپس در ساعت ۱۴ و ۴ دقیقه از کنار نقطه C به طرف B عبور کرده است .

در این فاصله زمانی (۱۵۶ دقیقه) ، اتوبوس فاصله AC را در t_A دقیقه و $2q$ نیم دور را در $74q$ دقیقه طی کرده است . بنابراین داریم :

$$(t_B + 74p + 40) + (t_A + 74q) = 140 + 156 = 296 ;$$

که از آنجا به سادگی بدست می آید :

$$p + q = 3$$

این جدول را تشکیل می دهیم :

p	۰	۱	۲	۳
q	۳	۲	۱	۰
$t_A = 156 - 24q$	-۶۶	۸	۸۲	۱۵۶
$t_B = 100 - 74p$	۱۴۰	۲۶	-۴۸	-۱۲۲

به این ترتیب ، تنها جواب قابل قبول چنین است : $q = 2$ ، $p = 1$ و از آنجا $t_A = 8$ دقیقه و $t_B = 26$ دقیقه .

بنابراین

$$\frac{AC}{CB} = \frac{8}{26} \Rightarrow AC \neq 0/235AB$$

حالا جای پستخانه را پیدامی کنیم . حداکثر فاصله پستخانه تایکی از دو نقطه A و B ، چقدر باشد تا اتوبوس در ۲۰ دقیقه ، دوباره از آنجا عبور کند ؟

$$20 - 3 = 17 ; \quad 17 \div 2 = 8/5 ; \quad 8/5 \div 34 = 0/25$$

یعنی ، پستخانه باید در يك چهارم فاصله AB ، در یکی از دو طرف

مسیر ، قرار گرفته باشد .

و اما برای صندوق پسانداز :

$54 - 3 = 51$; $51 \div 2 = 25.5$; $25.5 \div 34 = 0.75$
 به این ترتیب ، صندوق پسانداز هم در نقطه‌هایی می‌تواند باشد، که
 برای پستخانه امکان دارد (حداکثر 0.75 فاصله تا A ، یعنی حداقل
 0.25 فاصله تا B و برعکس) .

از فرضهای مسأله ، نمی‌توان معلوم کرد که آیا پستخانه و صندوق
 پسانداز هر دو در یکی از یک چهارم فاصله‌ها قرار دارند ، یا در دو
 طرف (یعنی آیا هر دو مثلاً در طرف A هستند یا یکی در طرف A و
 دیگری در طرف B) . حتی ممکن است که پستخانه و صندوق پسانداز
 در یک ساختمان باشند ؛ در این صورت ، وقتی که کارمند پست به
 خیابان آمده است ، غیر از فاصله زمانی است که کارمند صندوق
 پسانداز روی بالکن اطاق خود نشسته است .

۱۸۷. در کتاب ای. یا. دهمان به نام «داستانهایی در باره حل مسأله‌ها»

(۱۹۵۷ میلادی) ، این مسأله به این ترتیب حل شده است :

«سرعت نامه‌رسانها را به u و v و زمان لازم از شروع حرکت تا لحظه
 برخورد را t می‌گیریم . نامه‌رسان اول برای طی کردن تمام فاصله
 به $t + 16$ ساعت ، و نامه‌رسان دوم به $t + 9$ ساعت ، وقت احتیاج
 دارد . فاصله بین دو نقطه A و B را به سه طریق می‌توان نشان
 داد :

$$(t + 16)u , \quad (t + 9)v , \quad t(u + v)$$

و بنابراین به تساویهای زیر می‌رسیم :

$$(t + 16)u = t(u + v) \Rightarrow t = \frac{16u}{v} ,$$

$$(t + 9)v = t(u + v) \Rightarrow t = \frac{9v}{u} ,$$

از آنجا بدست می‌آید :

$$16 \times \frac{u}{v} = 9 \times \frac{v}{u} \Rightarrow \frac{u^2}{v^2} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{3}{4}$$

این مقدار را در تساوی اول قرار می دهیم و t را بدست می آوریم :

$$t = \frac{16 \times 3}{4} = 12$$

نامه رسان اول برای تمام راه به $16 + 12 = 28$ ساعت و نامه رسان دوم به $9 + 12 = 21$ ساعت وقت ، احتیاج دارد .

(۲) شبیه این مسأله در کتاب ۱. م. پرژه والسکی به نام «مسأله های جبر» (۱۹۴۱ میلادی) وجود دارد :

« A و B در يك زمان از مسكو و تولا به طرف يكدیگر حرکت کردند و هر کدام از آنها در تمام راه ، سرعتی يك نواخت داشتند . A بعد از x ساعت از مسكو به تولا و B بعد از y ساعت از تولا به مسكو رسید . در راه ، m ساعت قبل از آنكه A به تولا برسد و n ساعت قبل از آنكه B به مسكو برسد ، يكدیگر را ملاقات کردند . از اینجا ثابت کنید :

$$x^2 \div y^2 = m \div n$$

در کتاب مذکور ، این راه حل داده شده است :

«فرض کنید ، فاصله بین مسكو و تولا ، a کیلومتر باشد ؛ در این

صورت سرعت های A و B به ترتیب مساوی $\frac{a}{x}$ و $\frac{a}{y}$ می شود . وقتی

که به هم می رسند ، A به اندازه $x - m$ ساعت و B به اندازه $y - n$ ساعت در راه بوده اند . بنابراین : $x - m = y - n$. در این مدت ،

A به اندازه $\frac{a}{x}(x - m)$ کیلومتر و B به اندازه $\frac{a}{y}(y - n)$

کیلومتر راه رفته اند ، بنابراین :

$$\frac{a}{x}(x - m) + \frac{a}{y}(y - n) = a ;$$

$$y(x - m) + x(y - n) = xy ;$$

از اینجا بدست می آید :

$$(x + y)(x - m) = xy \quad (۱)$$

$$(x + y)(y - n) = xy \quad (۲)$$

زیرا $x - m$ و $y - n$ با هم برابرند .

از تساوی (۱) بدست می آید : $x^2 = m(x + y)$ و از تساوی (۲):
 $y^2 = n(x + y)$ ؛ از آنجا

$$x^2 \div y^2 = m \div n$$

(۳) به این ترتیب ، ثابت شد که

$$m \div n \quad \text{نسبت}$$

(نسبت زمانی که طول می کشد تا A ، از لحظه ملاقات به انتهای راه برسد ، به زمانی که طول می کشد تا B ، از لحظه ملاقات به انتهای راه برسد) .

برابر است با نسبت $x^2 \div y^2$

(نسبت مربع زمانی که A برای تمام راه صرف کرده است ، به مربع زمانی که B برای تمام راه صرف کرده است) .

مفهوم فیزیکی «مربع زمان» در اینجا به چه معنی است ؟ می توان نسبت دو مربع را به صورت مربع نسبت به آنها نشان داد :

$$x^2 \div y^2 = (x \div y)^2$$

نسبت $(x \div y)$ ، مفهوم فیزیکی معینی دارد : این همان نسبت سرعتها است . پس چرا این مطلب در مورد نسبت $m \div n$ صادق نیست ؟

فرض کنید $x > y$ باشد

I . تمام راه را در x ساعت و B تمام راه را در y ساعت طی می کند ، یعنی سرعت B به اندازه $\frac{x}{y}$ سرعت A است . چون هر دو با سرعتی يك نواخت حرکت می کنند ، B تا لحظه ملاقات ، به اندازه $\frac{x}{y}$ متحرك A ، راه رفته است .

II . بعد از ملاقات ، A همانقدر راه در پیش دارد که B تا لحظه ملاقات آمده است ، و B همانقدر راه در پیش دارد که A تا لحظه ملاقات آمده است ؛ بنابراین A باید $\frac{x}{y}$ متحرك B در راه باشد ، تا به انتها برسد .

III. به این ترتیب ، بعد از ملاقات ، A باید $\frac{x}{y}$ برابر B راه برود ،

در حالی که سرعت B به اندازه $\frac{x}{y}$ سرعت A است ، بنابراین

$$m \div n = (x \div y) \cdot (x \div y) = x^2 \div y^2$$

حالا دیگر محاسبه ها به اندازه کافی ساده می شود و در جوابی که بدست می آید ، به خوبی مفهوم اصلی دیده می شود .

(۴) حالا مسئله مورد نظر را می توان به این ترتیب حل کرد .

t را زمانی می گیریم که از لحظه حرکت دو نامه رسان تا لحظه ملاقات طول کشیده است . بعد از ملاقات ، متحرک A ، راهی را که B در t ساعت رفته بود ، در m ساعت طی می کند ، و متحرک B ، راهی را که A در t ساعت رفته بود ، در n ساعت می رود . بنابراین

$$\frac{\text{سرعت } A}{\text{سرعت } B} = \frac{t}{m} = \frac{n}{t}$$

و از آنجا : $t = \sqrt{mn} = \sqrt{16 \times 9} = 12$ (ساعت)

$$T_A = 12 + 16 = 28 , \quad T_B = 12 + 9 = 21$$

(۵) در نوع دوم مسئله ، جالب است که آنرا در حالت کلی به صورت رابطه هایی در آوریم ، یعنی باید ثابت کنیم :

$$m \div n = (x \div y)^2$$

$$t = \sqrt{mn}$$

بهتر است که ابتدا رابطه $t = \sqrt{mn}$ را ثابت کنیم و سپس

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{(t+m)^2}{(t+n)^2} = \frac{(\sqrt{mn}+m)^2}{(\sqrt{mn}+n)^2} = \frac{m}{n}$$

و یا ساده تر

$$\frac{\text{سرعت } A}{\text{سرعت } B} = \frac{t}{x} = \frac{\sqrt{mn}}{m} = \sqrt{\frac{n}{m}}$$

۱۸۸. مجموع سه عدد مجهول برابر است با ۲۲. اگر به اولی ۱/۵ اضافه کنیم ، به مجموع هم ۱/۵ اضافه می شود ؛ اگر از دومی ۱/۵ کم

کنیم ، از مجموع هم $۱/۵$ کم می شود . اگر هردو عمل را انجام دهیم ، مجموع مساوی ۲۱ می شود .

به این ترتیب ، مسأله ما چنین می شود : «مجموع سه عدد برابر است با ۲۱ . دو عدد اول و دوم با هم برابرند و هر کدام از آنها $۲/۵$ برابر سومی است» . از اینجا نتیجه می شود که مجموع دو عدد اول و دوم مساوی ۵ برابر سومی می شود ، یعنی عدد ۲۱ مساوی ۶ برابر سومی است و بنابراین عدد سوم مساوی $۳/۵$ ($= ۲۱:۶$) خواهد بود . هر يك از دو عدد دیگر مساوی $۸/۷۵$ ($= ۳/۵ \times ۲/۵$) و عددهای مورد نظر مسأله چنین خواهند بود :

$$\text{عدد اول : } ۸/۷۵ - ۰/۵ = ۸/۲۵$$

$$\text{عدد دوم : } ۸/۷۵ + ۱/۵ = ۱۰/۲۵$$

۱۸۹. توجه کنیم که در تمام معادله های دستگاه ، مقدار ثابت برابر است با ۷ برابر ضریب ۷ . بنابراین جواب دستگاه چنین است :

$$x = z = t = u = v = w = ۰ , y = ۷$$

همین جواب برای هر مقادیر دیگری که به جای ضریبهای x ، z ، t ، u ، v ، w قرار دهیم ، قابل قبول است ، مگر در حالت خاصی که این ضریبها ، متناسب با ضریب ۷ باشند . در این حالت ، هفت معادله دستگاه ، تبدیل به يك معادله هفت مجهولی می شود ، یعنی معادله سیالی که دارای بی نهایت جواب است .

۱۹۰. وقتی که A به پایان خط رسیده بود ، یعنی ۱۰۰ یارد دویده بود ، B در ۱۰ یاردی او بود ، یعنی ۹۰ یارد دویده بود . بنابراین سرعت B برابر با $۰/۹$ سرعت A است . به همین ترتیب ، سرعت C برابر $۰/۹$ سرعت B و یا $۰/۸۱ = ۰/۹ \times ۰/۹$ سرعت A است . به این ترتیب وقتی که A به اندازه ۱۰۰ یارد دویده باشد ، C تنها ۸۱ یارد دویده است ، یعنی در ۱۹ ($= ۱۰۰ - ۸۱$) یاردی خط پایان است .

۱۹۱. از فرضهای مسأله نتیجه می شود :

اگر مسافر بعد از يك ساعت ، سرعت خود را از ۳ کیلومتر به ۴ کیلومتر در ساعت برساند ، روی هم $۴۵ + ۴۰$ ، یعنی ۸۵ دقیقه

زودتر می‌رسد .

از طرف دیگر ، وقتی که سرعت از ۳ کیلومتر به ۴ کیلومتر در ساعت

برسد ، برای هر سه کیلومتر به جای ۶۰ دقیقه ، $\frac{۳}{۴} \times ۶۰$ ، یعنی

۴۵ دقیقه وقت لازم است ، یعنی برای هر ۳ کیلومتر ۱۵ دقیقه و

برای هر کیلومتر ۵ دقیقه صرفه‌جویی می‌شود ، بنابراین ۸۵ دقیقه در

$۱۷ (= ۸۵ \div ۵)$ کیلومتر صرفه‌جویی شده است .

به این ترتیب ، فاصله بین ده‌تا ایستگاه راه‌آهن چنین می‌شود :

$$۱۷ + ۳ = ۲۰ \text{ (کیلومتر)}$$

۱۰۱۹۲) این مسأله در یکی از کنکورها داده شده است و نویسندۀ آن ،

به این ترتیب آنرا حل کرده است .

سرعت جریان آب رودخانه را x کیلومتر در ساعت ، و فاصله از

نقطه A تا محل برخورد دو قایق را y کیلومتر می‌گیریم . قایق

موتوری ، این فاصله را در جهت جریان آب در $\frac{y}{۲۰+x}$ ساعت و قایق

بدون پارو در $\frac{y}{x}$ ساعت طی می‌کند . به این ترتیب معادله اول

تشکیل می‌شود :

$$\frac{y}{x} - \frac{y}{۲۰+x} = ۲/۴$$

قایق از لحظه ملاقات با قایق موتوری تا نقطه B باز هم به اندازه

$(۳/۶x - y)$ کیلومتر تا نقطه B ، و قایق موتوری در برگشت ،

y کیلومتر تا نقطه A ، حرکت می‌کنند . توجه می‌کنیم که آنها ، این

فاصله‌ها را در زمان مساوی طی می‌کنند و بنابراین معادله دوم بدست

می‌آید :

$$\frac{y}{۲۰-x} = \frac{۳/۶x - y}{x}$$

به این ترتیب ، دو معادله دو مجهولی بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{y}{20+x} = \frac{12}{5} \\ \frac{y}{20-x} = \frac{\frac{18}{5}x - y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 60x = 25y \\ -9x^2 + 180x = 50y \end{cases}$$

از تقسیم دو معادله بریکدیگر بدست می آید :

$$\frac{3x + 60}{180 - 9x} = \frac{1}{2}$$

از آنجا $5x = 20$ و $x = 4$ کیلومتر در ساعت بدست می آید .
 (۲) می توان ، به جای مساوی قرار دادن زمانها ، از تساوی فاصله ها استفاده کرد .
 طبق فرض :

I. فاصله ای که قایق معمولی تا لحظه برخورد طی کرده است ،
 II. فاصله ای که قایق موتوری تا لحظه برخورد طی کرده است و
 III. فاصله ای که قایق موتوری ، بعد از برخورد طی کرده است ،
 با هم برابرند . z را فاصله زمانی از لحظه حرکت قایق موتوری تا لحظه برخورد می گیریم . در این صورت داریم :

$$(2/4 + z)x = z(20 + x) = (3/6 - 2/4 - x)(20 - x)$$

از آنجا

$$2/4x + zx = 20z + zx = 24 - 1/2x - 20z + zx ,$$

$$2/4x = 20z = 24 - 1/2x - 20z ,$$

$$z = \frac{2/4}{20}x ,$$

$$1/2x = 24 - 40z = 24 - 4/8x ,$$

$$6x = 24 , \quad x = 4 \quad (\text{کیلومتر در ساعت})$$

این راه حل ، هم از راه حل اول کوتاهتر است و هم شامل معادله درجه دوم نیست .

(۳) حالا سعی می کنیم ، مسأله را با تحلیل آنچه که پیش آمده است ،

حل کنیم .

طبق فرض، تا لحظه حرکت قایق موتوری، قایق معمولی با حرکت جریان آب $\frac{2}{4}$ ساعت با سرعت ساعتی x کیلومتر جلو رفته است، یعنی وقتی که قایق موتوری حرکت می کند، به اندازه $\frac{2}{4}x$ کیلومتر با قایق معمولی فاصله دارد. قایق موتوری و قایق معمولی روی يك رودخانه حرکت می کنند، سرعت قایق معمولی نسبت به آب مساوی صفر، و سرعت قایق موتوری نسبت به آب مساوی 20 کیلومتر در ساعت است؛ بنابراین دو قایق با سرعت ساعتی 20 کیلومتر به هم نزدیک می شوند (کاملاً بدون ارتباط با سرعت جریان آب). به این ترتیب، قایق موتوری بعد از $z = \frac{2}{4}x \div 20 = 0.0125x$ ساعت به قایق معمولی می رسد.

به این ترتیب، با تحلیل ساده آنچه که پیش آمده است، به رابطه ای رسیدیم، که برای بدست آوردن آن از راه عادی و سنتی، احتیاج به تشکیل و حل يك دستگاه معادله ها داشت. سپس قایق موتوری در جهت جریان آب به اندازه $z(20 + x)$ کیلومتر پیش می رود؛

قایق موتوری در خلاف جریان آب به اندازه $(\frac{3}{6} - \frac{2}{4} - z)(20 - x)$ کیلومتر پیش می رود، از آنجا

$$40z = 24 - \frac{1}{2}x; \frac{4}{8}x = 24 - \frac{1}{2}x; 6x = 24; x = 4$$

(۴) بالاخره به راه حل خالص حسابی مسأله می پردازیم. قایق معمولی روی هم $\frac{3}{6}$ ساعت در حرکت بوده است، از این مدت، $\frac{2}{4}$ ساعت تا لحظه حرکت قایق موتوری طول کشیده است. بنابراین، فاصله قایق موتوری (در لحظه حرکت)، تا قایق معمولی، مساوی

$$\frac{2}{3} \text{ یعنی } \frac{2}{4} \div \frac{3}{6} \text{، فاصله } AB \text{ است.}$$

اگر جریان آب وجود نداشت، قایق موتوری برای برگشتن هم، همین فاصله را طی می کرد. ولی جریان آب، هم قایق معمولی و هم قایق موتوری را از A به طرف B می کشد. از لحظه ای که قایق

موتوری حرکت می کند تا پایان کار، اثر جریان آب بر قایق معمولی و قایق موتوری یکی است؛ جریان آب، در این مدت، قایق معمولی را به اندازه $\frac{1}{3}AB$ جابجا می کند، بنابراین قایق موتوری هم در

این فاصله زمانی به اندازه $\frac{1}{3}AB$ به طرف B کشیده می شود.

به این ترتیب قایق موتوری، این فاصله را طی می کند:

$$\frac{2}{3}AB \quad \text{ابتدا:}$$

$$\frac{2}{3}AB \quad \text{در برگشت:}$$

$$\frac{1}{3}AB \quad \text{فاصله ای که آب آنرا به طرف } B \text{ کشاند:}$$

$$\frac{5}{3}AB \quad \text{روی هم:}$$

در همین مدت، جریان آب به اندازه $\frac{1}{3}AB$ حرکت می کند، یعنی

سرعت قایق موتوری $\frac{1}{3} \div \frac{5}{3}$ ، یعنی ۵ برابر سرعت جریان آب است. از اینجا سرعت جریان آب $5 \div 20$ ، یعنی ۴ کیلومتر در ساعت، می شود.

۱۹۳. اشتباه در اینجاست که معادله ای که تشکیل داده ایم، تنها در

فاصله زمانی معینی درست است؛ در حقیقت، اگر در هر ثانیه $\frac{1}{m}$

آبی که در حوض وجود دارد، تبخیر می شود، بعد از m ثانیه، این قسمت آب بکلی از بین می رود و رابطه ما، از آن به بعد درستی خود را از دست می دهد.

m ثانیه بعد از شروع آزمایش، مقدار آبی که تبخیر می شود، برابر است با مقدار آبی که داخل می شود و حجم آب حوض ثابت می ماند.

این حجم (برای $t = m$) چنین است:

$$w = vt - \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{m} t^2 = vm - \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{m} m^2 = \frac{vm}{2} \quad (\text{لیتر})$$

پس مطلب در مورد حرکت متشابه‌التغییر کند شونده چگونه است .
در آنجا ، طبیعت کار چیز دیگری است :

برای $a < 0$ و برای $t = m = \frac{v}{a}$ ، نقطه متحرك به حداکثر فاصله

خود از نقطه شروع ، می‌رسد و شروع به حرکت در جهت برگشت

می‌کند و بعد از $t = 2m = \frac{2v}{a}$ به نقطه اولیه خود بازمی‌گردد و

از آنجا ، حرکت متشابه‌التغییر خود را تا بی‌نهایت ادامه می‌دهد.

۱۹۴. a) از سه نقطه ، همیشه می‌توان يك صفحه گذراند و بنابراین ، سه مگس همواره بر يك صفحه قرار دارند .

b) طبق فرض ، بعد از ۹ دقیقه ، هر چهار مگس روی يك صفحه قرار می‌گیرند ، یعنی يك چهارضلعی مسطحه تشکیل می‌دهند . از هر رأس این چهارضلعی مسطح مسیرهای مگسها عبور می‌کند . این مسیرها ، نیم‌خطهایی هستند که مبدا آنها انتهای بالای چوب است . در این حالت می‌توان انتهای بالای چوب را به عنوان رأس يك هرم باقاعده چهارضلعی در نظر گرفت که یالهای آن مسیرهای مگسها و قاعده آن همین چهارضلعی مسطح مذکور است . بنابر فرض ، همه مگسها در يك زمان شروع به حرکت می‌کنند و سرعتهای ثابتی هم دارند؛ به این ترتیب بعد از 9α دقیقه (α عددی است مثبت) از این پنج نقطه (انتهای چوب و هريك از مگسها) ، هر می متشابه با هرم یاد شده تشکیل می‌شود . (نسبت تشابه برابر است با α) ، بنابراین بعد از 9α دقیقه ، هر چهار مگس روی يك صفحه قرار خواهند داشت .

عددهایی که در فرض مسأله داده شده است ، مورد استفاده‌ای ندارند . صفحه‌ای که در لحظه مفروض ، همه مگسها روی آن قرار گرفته‌اند ، به موازات خود حرکت می‌کند و با سرعتی يك نواخت از نقطه شروع (بالای چوب) دور می‌شود .

اگر سه تا از مگسها روی صفحه‌ای پرواز کنند که از رأس چوب می‌گذرد، مسیر مگس چهارم هم روی همان صفحه خواهد بود و این صفحه، ثابت باقی خواهد ماند.

۱۹۵. اگر طول پاره خط کوچکتر، از نصف طول پاره خط بزرگتر، بیشتر نباشد، مسأله تنها يك جواب دارد: پاره خط کوچکتر، قاعده و پاره خط بزرگتر، یکی از ساقهای مثلث است.

در حالتی که پاره خط کوچکتر، بزرگتر از نصف پاره خط بزرگتر باشد، می‌توان هريك از دو پاره‌خط را قاعده و دیگری را ساق مثلث گرفت؛ بنابراین در این حالت، مسأله دو جواب دارد.

بالاخره اگر دو پاره‌خط مساوی باشند، فرقی نمی‌کند که کدام پاره‌خط را قاعده و کدام پاره‌خط را ساق مثلث به حساب بیاوریم و در هر حال مثلثی متساوی‌الاضلاع بدست می‌آید.

۱۹۶. جواب مربوط است به مقدار زاویه α ، که دو ساق ذوزنقه با هم می‌سازند. برای اینکه بتوان با میزها يك حلقه کامل ساخت،

باید داشته باشیم: $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$. (n عددی است صحیح). اگر

n عددی زوج باشد، با قرار دادن میزها در کنار هم، هر دو میز مجاور يك متوازی‌الاضلاع می‌سازند. در این حالت ضلع آزاد میز آخر با ضلع آزاد میز اول موازی می‌شود. ولی اگر n عددی فرد باشد، ضلعهای آزاد دو طرف ناموازی می‌شوند.

۱۹۷. برای حل این مسأله به طریق مستقیم، باید به ترتیب این چیزها را پیدا کرد:

- (۱) حجم مکعب اول؛
- (۲) طول ضلع مکعب اول؛
- (۳) قطر کره محیطی مکعب اول؛
- (۴) مساحت این کره؛
- (۵) مساحت سطح کره دوم؛
- (۶) قطر کره دوم؛

(۷) طول ضلع مکعبی که در کره دوم محاط شده است ؛

(۸) حجم مکعب دوم ؛

(۹) و بالاخره وزن آن .

ولی این مسأله را می توان ، با در نظر گرفتن تشابهات ، خیلی ساده تر حل کرد . در حقیقت مکعب اول همراه با کره ای که بر آن محیط شده است ، با مکعب دوم همراه با کره محیطی آن ، متشابه است . نسبت تشابه دوشکل را ، به کمک نسبت مساحت های شکل های متشابه (در اینجا مساحت دو کره) پیدا می کنیم ؛ می دانیم که نسبت مساحت های دو شکل متشابه برابر است با مجذور نسبت اندازه های خطی آنها ، یعنی نسبت اندازه های خطی دو شکل متشابه (نسبت تشابه) ، برابر است با جذر نسبت مساحت های آنها .

طبق فرض ، نسبت مساحت های دو کره چنین است :

$$S_2 \div S_1 = 4$$

از آنجا نسبت تشابه (یعنی نسبت اندازه های خطی) برابر است با

$$L_2 : L_1 = \sqrt{S_2 : S_1} = 2$$

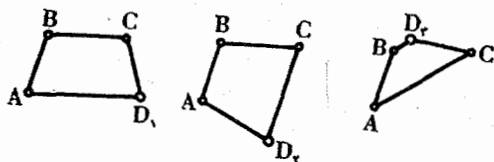
بنابراین ، طول ضلع مکعب دوم ، دو برابر طول ضلع مکعب اول است . در چنین حالتی حجم مکعب دوم 2^3 ، یعنی ۸ برابر حجم مکعب اول می شود .

از طرف دیگر ، وزن مخصوص آلیاژ مکعب دوم $2/4 \div 3/6$ ، یعنی $1/5$ برابر وزن مخصوص آلیاژ مکعب اول است ، در نتیجه وزن مکعب دوم چنین خواهد بود :

$$41 \frac{2}{3} \times 8 \times 1/5 = 500 \text{ (گرم)}$$

۱۹۸. a) مسأله به اندازه ای مقدماتی است ، که ممکن است شما از حل آن منصرف شوید ، ولی آیا فکر کرده اید که مسأله سه جواب دارد (شکل ۸۵) . درچه حالتی مسأله دو جواب دارد و درچه حالتی يك جواب ؟

b) می دانیم که يك ذوزنقه متساوی الساقین را می توان در دایره ای محاط



شکل ۸۵

کرد . بنابراین هر يك از گروه های چهار نقطه ای

$$A, B, C, D_1$$

$$A, B, C, D_2$$

$$A, B, C, D_3$$

بر محیط يك دایره قرار گرفته اند ، ولی چون این سه دایره ، سه نقطه مشترک (C, B, A) دارند ، برهم منطبق اند . بنابراین نقطه های مورد نظر A, B و C بر محیط دایره ای که از D_1, D_2 و D_3 می گذرد ، قرار دارند (شکل ۸۶-ا) .

فرض کنید مسأله حل شده است ؛ A, B و C نقطه های مورد نظر (شکل ۸۶-ب) و $ABCD_2$ و ABD_3C دو دوزنقه ، از سه دوزنقه متساوی الساقین مطلوب ، باشند .

در این صورت اولاً ساقهای دوزنقه متساوی الساقین $ABCD_2$ باهم برابرند :

$$AD_2 = BC$$

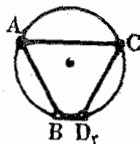
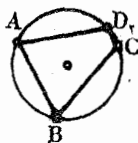
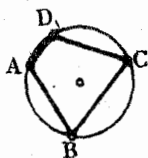
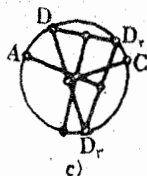
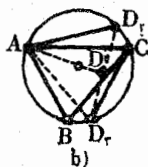
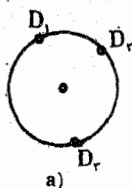
ثانیاً قطرهای دوزنقه متساوی الساقین ABD_3C با هم برابرند :

$$AD_3 = BC$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$AD_2 = AD_3$$

از اینجا نتیجه می شود که برای پیدا کردن نقطه A ، باید عمود منصف وتر D_2D_3 را رسم کرد و ادامه داد تا از مرکز دایره بگذرد و محیط دایره را قطع کند (شکل ۸۶-ج) ، به همین ترتیب با رسم عمود منصفهای D_1D_2 و D_1D_3 به ترتیب نقطه های B و C



d)

شکل ۸۶

بدست می آید. در شکل ۸۶-d، بطور جداگانه این سه دوزنقه رسم شده است.

نقطه‌هایی که از برخورد دوم عمود منصفها با دایره بدست می آید، منجر به جواب درست نمی‌شود. چرا؟

۱۹۹.۱۰۱) همه اندازه‌های خطی و همچنین جهتهای دوران، که در صورت مسأله داده شده است، بیفایده است و جواب مسأله تنها به سرعت دوران دایره‌ها مربوط می‌شود. کاملاً روشن است که شرط لازم و کافی، برای اینکه سوراخهای سه دایره، دوباره برهم منطبق شوند، این است که هر یک از سه صفحه، به وضع اولیه خود برگشته باشند. زمانی که صفحه A لازم دارد تا برای اولین بار به وضع اولیه خود برگردد، برابر است با:

$$60 \div 7.5 = 8 \quad (\text{ثانیه})$$

زمانی که لازم است تا سوراخ صفحه B به نقطه O برگردد، برابر است با:

$$60 \div 10 = 6 \quad (\text{ثانیه})$$

زمان لازم برای اینکه سوراخ صفحه C، دوباره روی O قرار گیرد،

برابر است با :

$$60 \div 6 \frac{2}{3} = 9 \quad (\text{ثانیه})$$

کوچکترین مضرب مشترک سه عدد ۸ و ۶ و ۹ عبارت است از ۷۲. بنابراین ، هر ۷۲ ثانیه (۱/۲ دقیقه) یکبار ، سوراخهای سه صفحه روی هم قرار می گیرند .

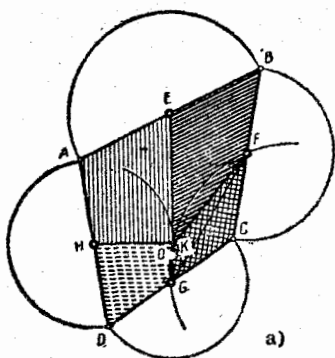
(b) $12 = 60 \div 5$ ، $5 = 60 \div 12$. کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ۱۲ و ۵ عبارت است از ۶۰ .

بنابراین ، هر یک دقیقه یکبار ، دستگاه به وضع اول خود برمی گردد و سوراخهای دو صفحه برهم منطبق می شوند .

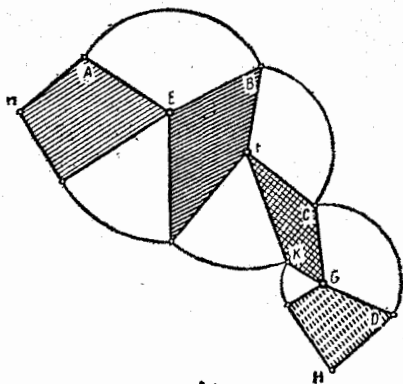
ولی ، برخلاف حالت سه صفحه ، مسأله مربوط به دو صفحه ، ممکن است جواب دیگری هم داشته باشد : دو سوراخی که روی دو صفحه ایجاد شده است ، ممکن است در نقطه O' ، قرینه O نسبت به AB ، نیز برهم منطبق شوند ، و این به شرطی است که در یک زمان به نقطه O' برسند . برای اینکه بدانیم ، در حالت خاص این مسأله ، چنین وضعی پیش می آید یا نه ، باید از وضع و محل نقطه O اطلاع داشته باشیم ؛ ولی چون صورت مسأله ، این اطلاع را به ما نمی دهد ، از بحث درباره امکان وجود انطباق دوم صرف نظر می کنیم .

۴۰۰ . می دانیم که چهار ضلعی را با معلوم بودن پنج جزء آن ، می توان مشخص کرد ؛ در حالت مفروض ، تنها سه جزء چهار ضلعی $KLMN$ معلوم است : مساحت و دو جزء دیگر . به همین مناسبت ، در این مورد به اصطلاح ، دو درجه آزادی داریم ؛ و همین آزادی به ما امکان می دهد که بتوانیم چهار ضلعی $KLMN$ را ، از چهار قطعه ای که چهار ضلعی $ABCD$ را تشکیل می دهند ، بسازیم .

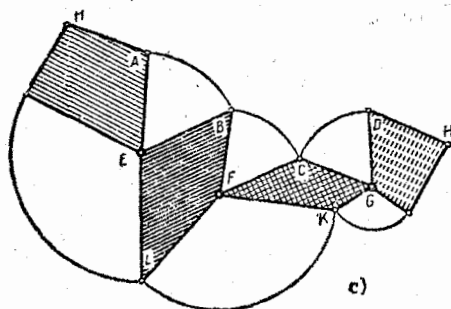
از حالت های مختلفی که برای مفروض بودن دو جزء چهار ضلعی $KLMN$ می توان در نظر گرفت ، تنها یک حالت را مورد بررسی قرار می دهیم : فرض می کنیم که ضلع MN و زاویه K معلوم باشد .



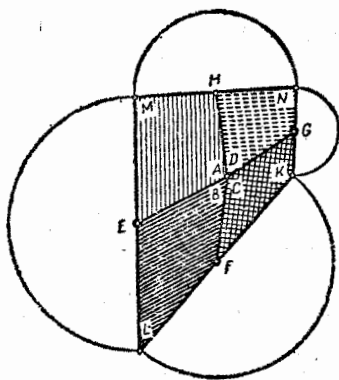
a)



b)



c)



d)

شکل ۸

$ABCD$ مفروض چهارضلعی را وسط ضلعهای H و G ، F ، E می گیریم. به مرکز H و شعاع مساوی $\frac{MN}{2}$ قوسی می زنیم، سپس روی پاره خط FG ، قوسی درخور زاویه مفروض K رسم می کنیم (دایره ای که از F و G بگذرد، به نحوی که از هر نقطه قوس FG به F و G وصل کنیم، زاویه ای مساوی K بدست آید). نقطه برخورد دو قوسی را که رسم کرده ایم به نقطه های E ، F ، G و H وصل می کنیم. چهار پاره خط OE ، OF ، OG و OH ، چهارضلعی مفروض $ABCD$ را به چهار قسمت تقسیم می کند، به نحوی که از

آنها می توان چهارضلعی مطلوب $KLMN$ را ساخت .
 فرض می کنیم در نقطه های E ، F ، G و H لولاهایی وجود داشته باشد ؛ چهارضلعی $EBFO$ را در جای خود نگه می داریم و سایر چهارضلعیها را به نحوی که در شکل ۸۷ (d و c ، b) دیده می شود ، جابجا می کنیم . در نتیجه ، چهارضلعی $KLMN$ بدست می آید که با شرطهای مسأله می سازد .
 به این نکته ها هم توجه کنید :

(۱) دو قسمت از چهارضلعی تنها منتقل می شوند (یکی از آنها ضمن راه به اندازه ۳۶۰ درجه دوران می کند) و دو قسمت دیگر به اندازه ۱۸۰ درجه دوران می کند .

(۲) جوابی که پیدا کردیم ، تنها جواب ممکن نیست . در حقیقت مرکز دایره ای را که به شعاع $\frac{MN}{۲}$ رسم کردیم ، می توان به جای H ، یکی از نقطه های E ، F یا G گرفت . همچنین زاویه K را به جای پاره خط FG ، می توان روی پاره خط EF ساخت . علاوه بر اینها دو دایره ، در حالت کلی ، یکدیگر را در دو نقطه قطع می کنند . بنابراین ، در حالت کلی ، $۲ \times ۲ \times ۴$ ، یعنی ۱۶ حالت مختلف وجود دارد .

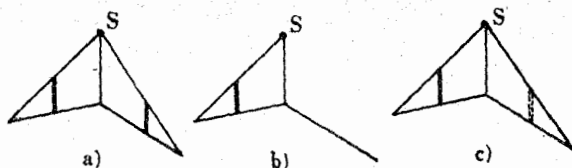
(۳) ما از لولای نقطه H استفاده نکردیم ؛ ولی می توان از لولای H هم استفاده کرد و در عوض یکی از لولاهای دیگر را بدون استفاده گذاشت .

۲۰۱. روش پیدا کردن آنچه که مسأله خواسته است ، در شکل ۸۸- a داده شده است .

و حالا به پاسخ پرسشهای اضافی می پردازیم :

(۱) برای پیدا کردن جای منبع نور ، وضع قرار گرفتن ستونها ، هیچگونه اهمیتی ندارد . برای پیدا کردن جای «پایه» منبع نور ، باید مطمئن باشیم که ستونها قائم اند .

(۲) جواب به این پرسش هم کاملاً شبیه حالت قبل است: برای پیدا



شکل ۸۸

کردن جای منبع نور، وضع صفحه‌ای که سایه ستونها بر آن می‌افتد، اهمیتی ندارد؛ ولی برای پیدا کردن جای «پایه» منبع نور، باید صفحه‌ای که سایه ستونهای قائم بر آن می‌افتد، افقی باشد.

۳) اگر همانطور که در فرض مسأله گفته شده است، ستونها قائم و سایه آنها روی یک صفحه افقی قرار گرفته باشد، برای حل مسأله کافی است یکی از ستونها و سایه آن و فقط امتداد سایه ستون دوم داده شده باشد؛ در این صورت می‌توان ابتدا «پایه» منبع نور و سپس خود منبع نور را بدست آورد (شکل ۸۸-ب). اگر روی شکل، یکی از ستونها و سایه آن و همچنین سایه ستون قائم دوم داده شده باشد، می‌توان نه تنها منبع نور و «پایه» آنرا پیدا کرد، بلکه ارتفاع ستون دوم هم قابل محاسبه است (شکل ۸۸-ج).

در حالتی که تنها امتداد سایه‌های دو ستون داده شده باشد، تنها می‌توان «پایه» منبع نور را پیدا کرد. حتی اگر دو سایه بطور کامل هم داده شده باشد، نمی‌توان جای منبع نور را، بدون در دست داشتن یکی از ستونها، پیدا کرد.

۲۰۲. شعاع قاعده مخروط را r و طول مولد آنرا a می‌گیریم. در این صورت محیط دایره‌ای که به وسیله نقطه محیط قاعده مخروط، روی صفحه افقی رسم می‌شود، برابر است با:

$$L = 2\pi a$$

محیط قاعده مخروط برابر است با:

$$l = 2\pi r$$

بعذاز آنکه مخروط یک دور کامل دور رأس S بچرخد، به شرطی

مولد SA بر جای اولیۀ خود قرار می گیرد که داشته باشیم :

$$L = ln \quad (n \text{ عددی است صحیح})$$

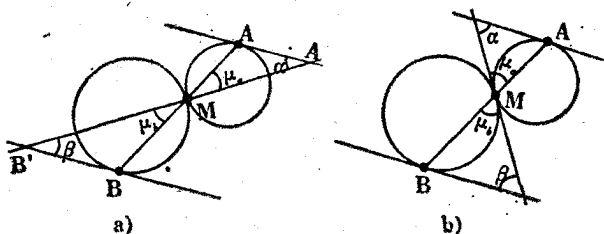
بنابراین باید داشته باشیم :

$$a = rn$$

یعنی باید طول مولد مخروط مضرب صحیحی از طول شعاع قاعدۀ مخروط باشد .

اگر $n = 1$ باشد ، چه وضعی پیش می آید ؟ مخروط چگونه باید باشد تا مولد SA برای نخستین بار بعد از آنکه مخروط ، m دور کامل دور رأس آن دوران کند ، در وضع اولیۀ خود قرار گیرد (m عددی است صحیح) ؟

۲۰۳. اثبات را بدون هیچگونه محاسبه ای می دهیم .



شکل ۸۹

خطالمرکزین دو دایره را رسم می کنیم ، این خط از نقطۀ M می گذرد (شکل ۸۹-ا) .

ابتدا مماس در نقطۀ A را در نظر می گیریم . زاویۀ $AA'M$ را ، که این مماس با خطالمرکزین می سازد ، به α نشان می دهیم . مقدار زاویۀ α بستگی به زاویۀ $\mu_a = \angle AMA'$ دارد ، یعنی :

$$\alpha = f_a(\mu_a)$$

که در آن f_a عبارت است از يك تابع .

حالا به مماس در نقطۀ B می پردازیم . زاویۀ $BB'M$ را ، که این مماس با خطالمرکزین می سازد ، β می نامیم ، مقدار زاویۀ β از روی

مقدار زاویه $BMB' = \mu_b$ معین می شود ، به نحوی که

$$\beta = f_b(\mu_b)$$

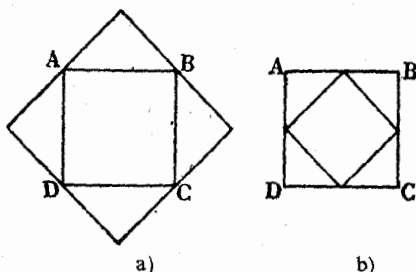
به علت وضع کاملاً مشابهی که این دو حالت دارند ، تابعهای f_a و f_b متحدند ، یعنی همانگونه که زاویه α به صورت يك جوابی از روی مقدار زاویه μ_a معین می شود؛ درست به همان ترتیب ، زاویه β هم به صورت يك جوابی از روی زاویه μ_b معین می شود:

$$\mu_b \div \mu_a = f_b(\mu_b) \div f_a(\mu_a)$$

ولی $\mu_a = \mu_b$ ، بنابراین $f_a(\mu_a) = f_b(\mu_b)$ و از آنجا $\alpha = \beta$.

به جای خط کمی خط المرکزین ، می توان از مماس مشترک دو دایره استفاده کرد و استدلالی کاملاً شبیه بالا ، انجام داد (شکل ۸۹-ب) .
۲۰۴ . همه مطلب این است که مژده و توکا ، با واحدهای مختلفی اندازه گیری کرده اند .

طول ضلع مربع $ABCD$ را a می گیریم ، در این صورت مساحت آن با عدد a^2 نشان داده می شود .



شکل ۹۰

ضلع مربع محیطی مساوی $a\sqrt{2}$ و محیط آن مساوی $4a\sqrt{2}$ می شود (شکل ۹۰-ا) . طبق اندازه گیری مژده $a^2 = 4a\sqrt{2}$ و از آنجا $a = 4\sqrt{2}$ ، یعنی ضلع مربع محیطی برابر است با $a\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ ، یعنی ۸ واحد انتخابی مژده .

ضلع مربع محاطی برابر است با $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ و محیط آن $2a\sqrt{2}$. طبق

اندازه گیری توکا $a\sqrt{2} = 2a/\sqrt{2}$ و از آنجا $a = 2/\sqrt{2}$ ، یعنی ضلع مربع محاطی برابر است $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 2/\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، یعنی ۲ واحد انتخابی توکا.

با واحدی که مژده انتخاب کرده است، طول ضلع مربع $ABCD$ مساوی $4/\sqrt{2}$ و با واحدی که توکا انتخاب کرده است، طول ضلع این مربع مساوی $2/\sqrt{2}$ شده است. بنابراین واحد انتخابی مژده نصف واحد انتخابی توکا بوده است.

برای مژده عدد مساحت مربع $ABCD$ و عدد محیط مربع محیطی آن یکی شده است:

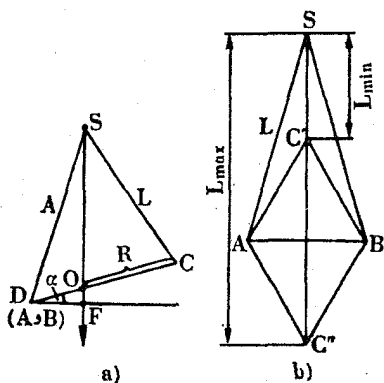
$$4/\sqrt{2} \times 4/\sqrt{2} = 32; \quad 4 \times 8 = 32$$

برای توکا هم عدد مساحت مربع $ABCD$ و عدد محیط مربع محاطی آن یکی شده است:

$$2/\sqrt{2} \times 2/\sqrt{2} = 8; \quad 4 \times 2 = 8$$

۲۰۵. به جای حلقه به شعاع R ، می توان مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $a = R\sqrt{3}$ را در نظر گرفت:

$$SD = \lambda = \sqrt{L^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{L^2 - \frac{3}{4}R^2}$$



شکل ۹۱

با تغییر طول l نخ SC ، وضع حلقه ABC در فضا تغییر می کند؛ ضمناً (شکل ۹۱- a) طولهای SA ، SB و SD بدون تغییر می ماند و نقطه O ، مرکز حلقه و مثلث، روی قائمی که از نقطه S می گذرد، باقی می ماند. محاسبات را

انجام می دهیم:

اگر از رابطه $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ برای مساحت مثلث

استفاده کنیم ، با توجه به مقدار λ ، داریم :

$$S_{DSC} = \frac{1}{4} \sqrt{6R^2L^2 + 3R^2l^2 + 2Ll^2 - 9R^2 - L^2 - l^2} ;$$

$$\cos(SDC) = \frac{\lambda^2 + \left(\frac{3}{2}R\right)^2 - l^2}{3\lambda R} ;$$

$$SO^2 = \frac{2}{3}L^2 - R^2 + \frac{1}{3}l^2 ;$$

$$S_{DSO} = \frac{1}{3}S_{DSC} = \frac{1}{2}DF \cdot SO ;$$

$$DF = \frac{2}{3} \cdot \frac{S_{DSC}}{SO} = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - \frac{(L^2 - l^2)^2}{6L^2 + 3l^2 - 9R^2}} ;$$

$$\cos \alpha = \frac{DF}{DO} = \sqrt{1 - \frac{(L^2 - l^2)^2}{(6L^2 + 3l^2 - 9R^2)R^2}} ;$$

$$\sin \alpha = \frac{L^2 - l^2}{R\sqrt{3(2L^2 + l^2 - 3R^2)}}$$

در مقدار $\sin \alpha$ که به این ترتیب بدست آمده است بحث می کنیم :

۱) $\sin \alpha = 0$ ، وقتی است که $L^2 - l^2 = 0$ باشد ، یعنی وقتی $\alpha = 0$

است که $L = l$ باشد ، نتیجه ای که برای ما روشن بود .

۲) وقتی $\sin \alpha = 1$ است که داشته باشیم :

$$L^2 - l^2 = R\sqrt{3(2L^2 + l^2 - 3R^2)}$$

$$l^2 = L^2 + \frac{3}{4}R^2 \pm 3R\sqrt{L^2 - \frac{3}{4}R^2} \quad \text{و یا:}$$

و از آنجا نتیجه می شود :

$$l = \sqrt{L^2 - \frac{3}{4}R^2} \pm \frac{3}{2}R$$

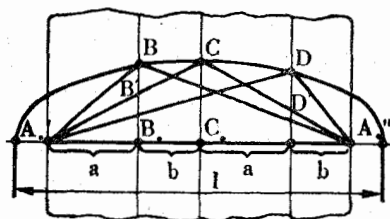
البته این نتیجه را می توان مستقیماً و از بررسی شکل ۹۱-b هم

بدست آورد ؛ روشن است که اگر $SA = SB = SC = L$ باشد

$L \geq R$ ، و اگر $SA = SB = L < SC$ باشد $\frac{\sqrt{3}}{2}R \geq L$ می شود.

نمونه ای بسازید و روی آن با تغییر طول نخ SC ، وضع حلقه ABC را مطالعه کنید.

۲۰۶. مکعب مستطیل مفروض را روی یال A می بریم و شکل باز شده مستطیل را رسم می کنیم: پنج خط موازی بدست می آید که به ترتیب به فاصله های a, b, a, b, a از یکدیگر قرار گرفته اند (درازای مستطیل در اینجا هیچ اهمیتی ندارد). نقطه های A' و A'' ، که روی عمودی بر خطهای موازی قرار گرفته است، دو انتهای نخ به طول $l > 2(a+b)$



شکل ۹۳

را ثابت نگه می دارد. نخ به طول l ، در شکل باز شده، به صورت خط شکسته ای است که دو انتهای آن در نقطه های A' و A'' و رأسهای آن روی سه خط موازی قرار گرفته است (سه یال دیگر قوطی).

فاصله از B_0 تا نقطه مجهول B (که روی یک یال قرار دارند)، وقتی حداکثر است که هر سه ضلع خط شکسته، از نقطه B تا نقطه A'' ، روی شکل باز شده، بر امتداد یک خط راست واقع باشند ($A'B$) را پاره خط راستی فرض می کنیم).

فاصله از نقطه D_0 تا نقطه مجهول D (که روی همان یال قرار دارند)، به شرطی حداکثر می شود که هر سه ضلع دیگر خط شکسته، از D تا A' روی یک خط راست واقع باشند ($A'D$) را پاره خط راستی در نظر می گیریم).

فاصله از نقطه C_0 تا نقطه مجهول C (که روی یک یال قرار دارند)، وقتی حداکثر است که دو ضلع خط شکسته، از C تا A'' روی یک خط راست و دو ضلع دیگر خط شکسته، از C تا A' هم روی یک

خط راست قرار داشته باشند (شکل ۹۲).

متذکر می‌شویم که این نقطه‌ها، که روی شکل باز شده به A ، B و C نشان داده‌ایم، روی قوسی از یک بیضی قرار دارند که کانونهای آن A' و A'' و طول قطر بزرگترش مساوی l است.

(۲) چون مثلث $A'_0CA''_0$ متساوی‌الساقین است و ضمناً داریم:

$$A'_0B_0 = C_0D_0 \text{ و } B_0C_0 = D_0A''_0 \text{، بنابراین خواهیم داشت:}$$

$B'C = D'A''$ و $A'B' = CD'$ یعنی ضلعهای روبرو در چهارضلعی

$A_0B'CD'$ روی مکعب مستطیل، دو به دو مساوی‌اند و بنابراین

متوازی‌الاضلاع است.

۲۰۷. d را عرض نوار مجهول و b را فاصله مرکز شکل مفروض تا ضلع

آن، یعنی تا نزدیکترین ضلع نوار، می‌گیریم.



شکل ۹۳

روشن است که محورهای نوارها، شبکه‌ای درست می‌کنند که از شکلهایی (مثلث، مربع یا شش ضلعی) متشابه با شکلهای مفروض تشکیل شده است.

B را فاصله مرکز یکی از شکلهای شبکه تا ضلع آن می‌گیریم. دراین

صورت: $B = b + \frac{d}{4}$. طبق شرط مسأله، باید داشته باشیم:

$$S_b \div S_B = 1 \div n$$

$$S_b \div S_B = b^2 \div B^2 \quad \text{ولی داریم:}$$

$$1 \div n = b^2 \div B^2 = b^2 \div \left(b + \frac{d}{4}\right)^2 \quad \text{واز آنجا:}$$

$$nb^2 = b^2 + bd + \frac{d^2}{4} \quad \text{و سپس}$$

$$d^2 + 4bd + 4(1-n)b^2 = 0 \quad \text{و یا:}$$

$$d = 2b(\sqrt{n} - 1) \quad \text{و از آنجا:}$$

آیا این رابطه برای حالتی که کفپوش از لوزیهای به زاویه ۶۰ درجه درست شده است، صحیح است؟ برای لوزیهای غیر مشخص چطور؟

۲۰۸. در مسأله هیچ اندازه‌ای مشخص نشده است، به همین مناسبت طول ضلع مربع (رومیزی) را a می‌گیریم و ... بیشتر از این هیچ چیز لازم نیست. فرض می‌کنیم میز گردی در مقابل ما باشد که رومیزی مربع شکلی روی آن انداخته باشند؛ ببینیم اگر قطر میز شروع به بزرگ شدن کند، چه وضعی پیش می‌آید؟ فاصلهٔ رأسهای مربع رومیزی از زمین مرتباً کم می‌شود، در عین حال فاصلهٔ مرکز ضلعهای رومیزی از زمین هم به همان اندازه کم می‌شود. در این صورت اختلاف این دو فاصله، تغییری نمی‌کند.

به این ترتیب، اختلاف فاصله‌ای که باید محاسبه کنیم، به اندازه‌های میز هیچگونه ارتباطی ندارد.

حالا، برای اینکه بتوانیم مسأله را ساده‌تر حل کنیم، قطر میز را مساوی ضلع مربع رومیزی می‌گیریم. در این حالت، وسط ضلعهای مربع روی میز قرار می‌گیرند (یعنی آویزان نیستند)، و هر رأس مربع رومیزی به اندازهٔ اختلاف نصف قطر رومیزی و شعاع میز (که در اینجا مساوی نصف ضلع رومیزی است) آویزان می‌شود. به این ترتیب مقدار مجهول مسأله، برابر است با نصف اختلاف بین قطر و ضلع مربع، یعنی:

$$\frac{1}{2}(a\sqrt{2} - a) = (\sqrt{2} - 1) \frac{a}{2} \approx 0.207a$$

برای حل مسأله، فرض کردیم که شعاع میز مرتباً بزرگ شود؛ می‌توان شعاع میز را ثابت گرفت و فرض کرد که رومیزی مرتباً کوچک شود.

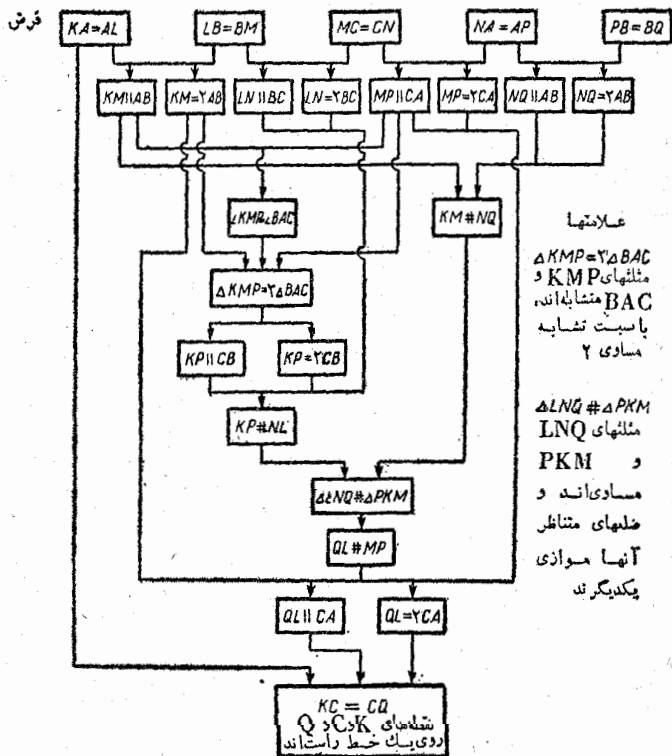
اگر اندازهٔ رومیزی را ثابت فرض کنیم و شعاع میز را مرتباً کوچک کنیم تا به یک نقطه تبدیل شود، چه پیش می‌آید؟ در این صورت هم، اختلاف مورد نظر برابر است با نصف اختلاف قطر و ضلع

رومیزی ، یعنی همان جواب قبلی را بدست می آوریم . پارچه مربع شکل پرچم ، در هوای بدون باد ، به منزله «یک چهارم رومیزی است که روی میز دایره ای به قطر صفر قرار گرفته باشد» .

مسئله . شرطهای همین مسئله را در نظر بگیرید ، با این تفاوت که دیگر مرکز رومیزی بر مرکز سطح میز قرار نگرفته است . در این صورت مجموع پاره خطهایی که چهار رأس آویزان رومیزی تشکیل داده اند ، با مجموع پاره خطهایی که وسط چهارضلع آویزان تشکیل داده اند ، چقدر اختلاف دارد ؟

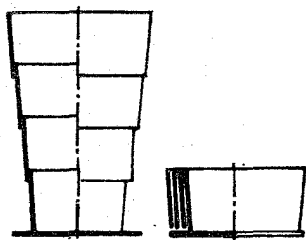
مسئله . همین شرطها را در نظر بگیرید ، با این تفاوت که رومیزی ، مستطیلی به بعدهای $a \times b$ باشد .

۲۰۹ . برای اینکه اثبات ساده تر انجام گیرد و معلوم شود ، از شرطهای



شکل ۹۴

مسأله چه نتیجه‌هایی بدست می‌آید و سپس از آنها چه نتیجه‌های دیگری پیدا می‌شود و غیره ، فرضها را در يك سطر قرار می‌دهیم و سپس به كمك پيكان نتیجه‌هایی كه از آنها بدست می‌آید نشان می‌دهیم و این روش را ادامه می‌دهیم تا به نتیجه مورد نظر برسیم . این روش بخصوص برای این مسأله مفید است و كار نتیجه‌گیری را ساده می‌كند . ۲۱۰ . به خاطر می‌آوریم كه شكل و اندازه‌های هر تصویر هندسی ، به وسیله چند پارامتر مستقل ازهم معین می‌شود ؛ لاقلاً یکی از این پارامترها ، باید خطی باشد (و یا كلی‌تر ، درجه خطی لاقلاً یکی از پارامتر ، صفر نباشد) ؛ مثلاً مثلث با سه پارامتر ، چهارضلعی مسطح با پنج



شكل ۹۵

پارامتر ، مكعب با يك پارامتر ، هرم مثلث‌القاعده با شش پارامتر و غیره مشخص می‌شود . پارامتر ، می‌تواند به طریقه‌های مختلف انتخاب شود ؛ مثلاً برای مكعب می‌توان ضلع ، یا قطر وجه ، یا قطر كره محاطی ، یا مساحت یکی از

وجه‌ها ، یا مساحت كل ، یا حجم ، یا حجم كره محاطی ، یا تفاضل ضلع از قطر ، یا حاصلضرب قطر در حجم ، یا خارج قسمت حجم بر حاصلضرب قطر مكعب در قطر وجه ، و غیره را به عنوان پارامتر انتخاب كرد .

وابسته نبودن پارامترها به يكديگر ، كه برای مشخص كردن شكل لازم است ، ارتباطی به نوع انتخاب پارامتر ندارد . وابسته نبودن پارامتر را با روشهای مختلف می‌توان معین كرد كه ساده‌تر از همه ، استفاده از پارامترها ، بطور متوالی ، برای ساختن شكل است .

لیوان تاشو ، مجموعه‌ای از چند جسم دوار است : صفحه گرد (استوانه قائم دوار) و چند مخروط ناقص توخالی .

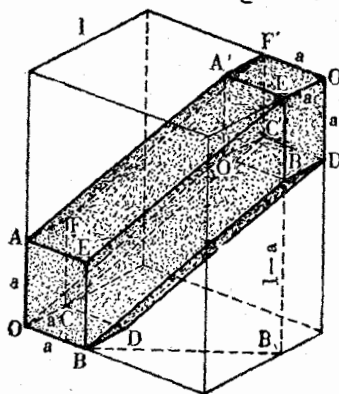
مخروطهای توخالی ، پارامترهای مشتركی دارند : ارتفاع ، زاویه رأس و ضخامت جدار .

برای معین بودن کف، دو پارامتر لازم است (مثلاً قطر وضخامت).
 برای معین بودن حلقه پایینی، چهار پارامتر لازم است (مثلاً قطر داخلی و قطر بیرونی قاعده پایین، ارتفاع و حجم داخلی).
 برای مشخص کردن حلقه‌های بعدی، تنها به یک پارامتر احتیاج داریم (مثلاً ارتفاع).

بالاخره باید تعداد حلقه‌ها (یا ارتفاع مشترک آنها، یا گنجایش لیوان، یا حجم ماده‌ای که برای ساختن لیوان بکار رفته است و غیره) را بدانیم.

به این ترتیب، روی هم $1 + 1 + 4 + 2$ ، یعنی ۸ پارامتر لازم داریم.

۲۱۱. چند وجهی مورد نظر، یک دوازده وجهی است. شش (سه زوج) صفحه قاطع (همه آنها با قطر OO_1 مکعب موازی‌اند)، یک منشور شش وجهی تشکیل می‌دهند. این منشور، به وسیله شش وجه مکعب، بریده می‌شود. بنابراین، شش وجه این دوازده وجهی، متوازی-الاضلاع‌هایی هستند که دو ضلع از هر کدام آنها موازی قطر مکعب است، و شش وجه دیگر، مربعهایی به ضلع a .



شکل ۹۶

حجم چند وجهی را معین می‌کنیم. برای این منظور آنرا به چهار قسمت، می‌کنیم. منشور $OBDCO'B'D'C'$ مایلی است با قاعده مربع شکل؛ ارتفاع این منشور مساوی $l - a$ و حجم آن مساوی $a^2(l - a)$ می‌شود. چند وجهی مورد نظر ما تشکیل شده است از سه منشور

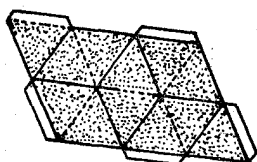
مایل، مساوی منشور فوق و یک مکعب $O'B'D'C'A'E'O_1F'$. بنابراین حجم آن چنین می‌شود:

$$V = 3a^2(l-a) + a^3 = 3a^2l - 3a^3 + a^3 = 3a^2l - 2a^3 = (3l - 2a)a^2$$

۲۱۲. چند ضلعی که در شکل ۱۹-d، نشان داده شده است، گسترده يك چند وجهی مقعر است که به این ترتیب درست شده است: روی هر وجه يك چهار وجهی منتظم، چهار وجهی منتظمی مساوی خود آن قرار دهید، يك چند وجهی ستاره‌ای بدست می‌آید که تعداد وجه‌های آن مساوی: $12 = 3 \times 4$ است، همچنین تعداد یال‌های آن مساوی:

$$4 \times 3 + \frac{4 \times 3}{2} = 18 \text{ و تعداد رأس‌های آن مساوی } 8 = 4 + \frac{3 \times 4}{3}$$

می‌باشد.

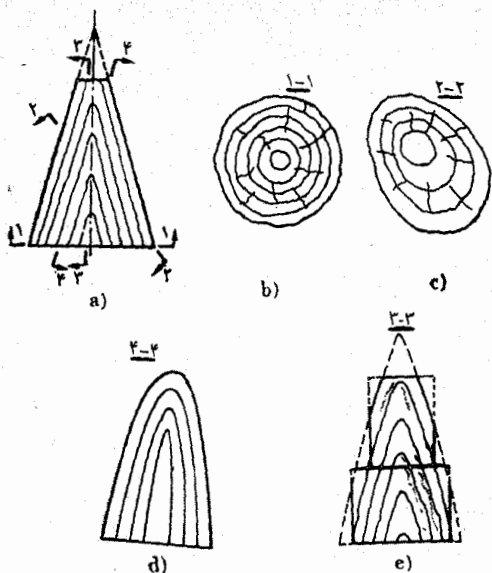


شکل ۹۷

توضیح. فرض می‌کنیم، چند ضلعی گسترده را روی يك كاغذ كلفت، یا روی يك مقوا رسم کرده باشیم. برای اینکه بتوانیم راحت‌تر آنرا تا کنیم، بهتر است، مقوارا روی همه قطرهای شکل گسترده، یعنی یال‌های چند وجهی، مختصری ببریم. طبیعی است که وقتی

چند وجهی محدب باشد، روی یال‌ها را از يك طرف مقوا می‌بریم، و اگر (مثل مسأله ما) با چند وجهی مقعر سروکار داشته باشیم، از دو طرف مقوا و ما این وضع را در شکل ۹۷، روی قطرها، نشان داده‌ایم.

۲۱۳. تیر چوبی را می‌توان مخروط قائمی دانست، که موازی قاعده‌اش قطع شده است؛ روی قاعده‌های بالا و پایین این مخروط ناقص، می‌توان به روشنی سال‌های عمر درخت را شمرد (اگر دقیقتر بخواهیم، تعداد زمستان‌هایی را که درخت گذرانده است). به این ترتیب، تیر چوبی را می‌توان دستگاهی از مخروط‌های ناقص دانست (شکل ۹۸-a)، به نحوی که تعداد مخروط‌ها، برابر است با تعداد سال‌های عمر درخت. به همین مناسبت، اگر آنرا در جهت عمود بر محور قطع کنیم، دایره‌هایی ظاهر می‌شود (شکل ۹۸-b)؛ در مقطعی که عمود بر محور نباشد، بیضی‌ها (شکل ۹۸-c)؛ در مقطع طولی (مثلاً در سطح تخته‌ها)،



شکل ۹۸

هذلولیها (شکل ۹۸-d)؛ در مقطع محوری، یعنی وقتی که صفحه مقطع از محور تیر بگذرد، خطهای راستی که در رأس تنه درخت به هم می‌رسند (شکل ۹۸-a) و بالاخره، وقتی که مقطع موازی با یکی از مولدهای مخروط باشد، قشرهای نماینده سالهای عمر درخت سهمیهایی نشان خواهند داد (شکل ۹۸-e).

۰۲۱۴ (a) داریم:

$$v_1 : v_2 : v_3 = \lambda_1 \mu_1 \gamma_1 : \lambda_2 \mu_2 \gamma_2 : \lambda_3 \mu_3 \gamma_3$$

$$v_1 = \frac{\lambda_1 \mu_1 \gamma_1}{\lambda_1 \mu_1 \gamma_1 + \lambda_2 \mu_2 \gamma_2 + \lambda_3 \mu_3 \gamma_3} v$$

واز آنجا:

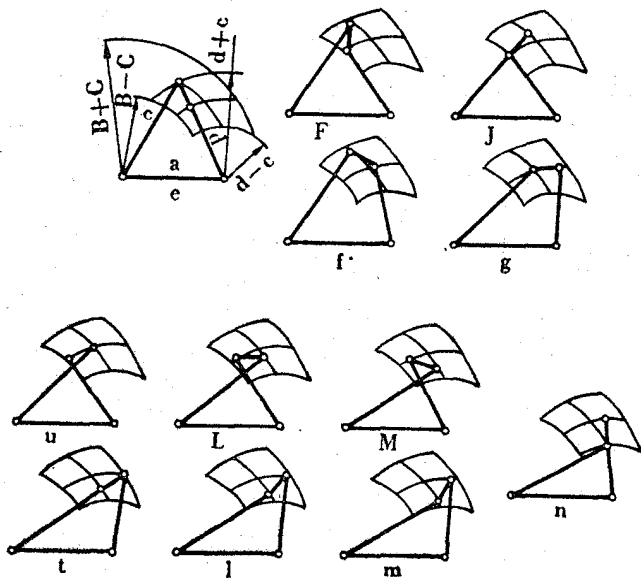
$$v_2 = \frac{\lambda_2 \mu_2 \gamma_2}{\lambda_1 \mu_1 \gamma_1 + \lambda_2 \mu_2 \gamma_2 + \lambda_3 \mu_3 \gamma_3} v$$

$$v_3 = \frac{\lambda_3 \mu_3 \gamma_3}{\lambda_1 \mu_1 \gamma_1 + \lambda_2 \mu_2 \gamma_2 + \lambda_3 \mu_3 \gamma_3} v$$

$(b) \frac{v}{3} = v_1 = v_2 = v_3$ (در این باره فکر کنید که، بدون استفاده از

حالت کلی a)، چگونه می‌توان مستقیماً این جواب را پیدا کرد).

۲۱۵. پاره‌خطی به طول a رسم می‌کنیم. دو انتهای این پاره‌خط، دو رأس از همه چهار ضلعیهای مورد بررسی است. دایره‌هایی به مرکز دو انتهای این پاره‌خط، و یکی به شعاع مساوی b و دیگری به شعاع مساوی d رسم می‌کنیم. رأسهای سوم و چهارم این چهار ضلعیها، تنها می‌تواند روی این دایره‌ها باشد. ولی کجا؟



شکل ۹۹

فرض می‌کنیم داشته باشیم: $b > c < d$. علاوه بر دایره به شعاع b ، به همان مرکز، دایره‌هایی به شعاعهای $b + c$ و $b - c$ رسم می‌کنیم؛ این قوسها حدودی را که انتهای دوم ضلع d می‌تواند روی آن قرار گیرد، مشخص می‌کند.

به همین ترتیب، علاوه بر دایره به شعاع d ، به همان مرکز، دایره-

هایی به شعاعهای $d + c$ و $d - c$ رسم می کنیم ، این قوسها هم ، حدودی را که انتهای دوم ضلع b می تواند روی آن قرار گیرد ، مشخص می کند.

با توجه به ضلع d ، پاره خط c می تواند یکی از دو نقطه انتهایی را اشغال کند، ضمناً در این دو حالت، پاره خطهای d و c روی يك خط راست قرار می گیرند؛ در حالت اول ضلع چهارضلعی مورد نظر در امتداد ضلع d خواهد بود، و در حالت دوم ، ضلع c کاملاً روی ضلع d واقع می شود. در حالت اول ، چهارضلعی به مثلث تبدیل می شود (شکل ۹۹-ع).

همین شکل را مبنا قرار می دهیم و شکلهای ممکنه چهارضلعی را بررسی می کنیم. انتهای آزاد پاره خط d می تواند یا در داخل مثلث و یا در خارج مثلث تغییر کند.

با تغییر انتهای آزاد پاره خط d ، حالتهاى مختلفی که در شکل ۹۹ نشان داده شده است، به وجود می آید.

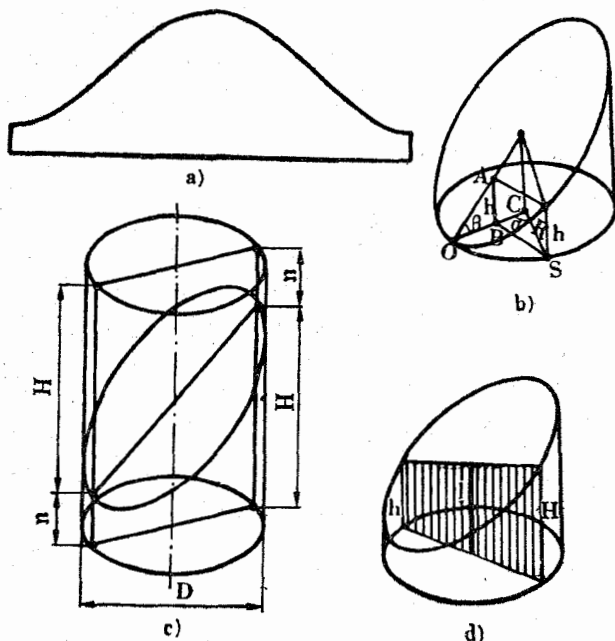
۲۱۶. گسترده سطح جانبی استوانه قائم دواری که به وسیله صفحه ناموازی با قاعده اش، قطع شده است، در شکل ۱۰۰-ا نشان داده شده است. این، يك منحنی سینوسی است. در حقیقت داریم (شکل ۱۰۰-ب):

$$OB = R - BC = R - R \cos \alpha = (1 - \cos \alpha) R ,$$

$$h = OB \cdot \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta (1 - \cos \alpha) R$$

مساحت گسترده سطح جانبی را، با دو روش می توان بدست آورد. روش اول. استوانه ناقص مفروض را تا استوانه کاملی به ارتفاع $H + h$ بزرگ می کنیم (شکل ۱۰۰-ج). کاملاً روشن است که قسمت اضافی هم، يك استوانه ناقص است که ضمناً با استوانه ناقص مفروض متقارن است (قرینه مرکزی). به این ترتیب، دو استوانه ناقص با هم برابرند؛ بنابراین، سطح جانبی استوانه ناقص برابر است با نصف سطح جانبی استوانه کامل. سطح جانبی استوانه دواری که بدست آورده ایم، برابر است با : $S_0 = \pi D(H + h)$ ؛ در نتیجه، سطح جانبی استوانه ناقص مفروض ، چنین می شود:

$$S = \frac{1}{2} S_0 = \frac{1}{2} \pi D (H + h)$$



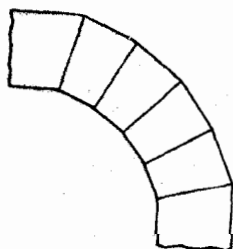
شکل ۱۰۰

دوش دوم. هر مقطع محوری از هر استوانه دواری (حتی غیر قائم)، که به وسیله صفحه‌ای ناموازی با قاعده، بریده شده باشد، عبارت است از یک دوزنقه (شکل ۱۰۰-d)؛ بنابراین مجموع طولهای دومیولده اصلی، یعنی مجموع دو قاعده دوزنقه، برابر است با دو برابر خط میانه دوزنقه (۳η)؛ بنابراین، ارتفاع

$$\eta = \frac{H + h}{2} \text{ متوسط گسترده برابر است با}$$

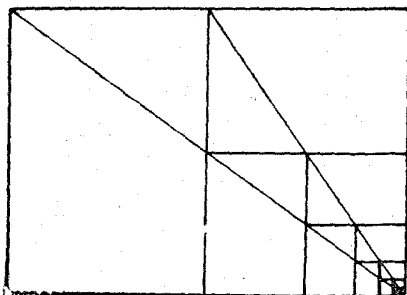
$$S = \pi D \eta = \pi D \frac{H + h}{2} \text{ از آنجا}$$

این رابطه، برای هر استوانه‌ای که قاعده آن، نسبت به مرکز متقارن باشد، درست است.



شکل ۱۰۱

توضیح . استوانه ناقص ، در عمل مورد استفاده زیاد دارد، مثلاً در زانوهای لوله‌های آب، که از قطعه‌های جدا از هم درست شده است (شکل ۱۰۱).



شکل ۱۰۲

۲۱۷. بنا بر فرض مسأله ، هر برگ متشابه با برگ قبلی است و ضمناً مساحت آن نصف مساحت برگ کاغذ قبلی است . از اینجا نتیجه می‌شود که ضلع هر مستطیل باید $\sqrt{2}$

برابر ضلع نظیرش در مستطیل بعدی باشد؛ و چون در دو مستطیل پشت سرهم، یکی از ضلعها، تغییر نمی‌کند (شکل ۱۰۲)، نسبت دو ضلع هر مستطیل مساوی $\sqrt{2}$ می‌شود (معمولاً نسبت طول ضلعهای برگهای کاغذ، به همین اندازه است، مثلاً در مورد کاغذ به قطع 297×210 میلی‌متر داریم: $\sqrt{2} \approx 210 \div 297$).

۲۱۸. ابتدا، تصاعدی را که از بریدن نوار، روی امتداد شعاع، بدست می‌آید، بررسی می‌کنیم.

$$\delta = \frac{D-d}{2n} \quad ; \quad \text{ضخامت هر قشر (نوار)}$$

مساحت حلقه‌ای که از نوار درست شده است :

$$S = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

$$L = \frac{S}{\delta} = \frac{\pi(D+d)(D-d)}{4(D-d)} 2n = \frac{D+d}{2} \pi n \quad ; \quad \text{طول نوار}$$

طول نوار قشر اول :

$$l_1 = \pi \left(d + \frac{D-d}{2n} \right) = \frac{(2n-1)d + D}{2n} \pi$$

طول نوار قشر آخر :

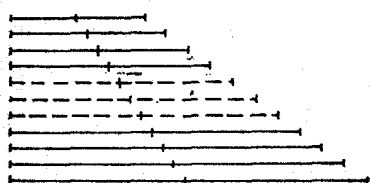
$$l_n = \pi \left(D - \frac{D-d}{2n} \right) = \frac{(2n-1)D+d}{2n} \pi$$

قدر نسبت تصاعد : $q = \frac{l_n - l_1}{n-1} = \frac{\pi}{2n(n-1)} \times$

$$\times \left[(2n-1)D+d - (2n-1)d - D \right] = \frac{D-d}{n} \pi$$

به دو طریق می توان؛ تصاعدی با $2n$ جمله بدست آورد.

طریق اول . دو قطعه هر دور، دو جمله متوالی از تصاعد باشند (شکل ۱۰۳). در این صورت، مجموع دو جمله دور k ام برابر است با :



$$\begin{aligned} l'_{2k} + l'_{2k+1} &= l'_{2k} + \\ &+ l'_{2k} + q' = 2l'_{2k} + q' \\ \text{و مجموع دو جمله بعدی} \\ (k+1) \text{ امین دور برابر است} \\ \text{با:} \end{aligned}$$

شکل ۱۰۳

$$l'_{2k+2} + l'_{2k+3} =$$

$$= (l'_{2k} + 2q') + (l'_{2k} + 3q') = 2l'_{2k} + 5q'$$

بنابراین طول دور $(k+1)$ ام به اندازه $4q' = 5q' - q'$ ، از طول دور k ام بیشتر است. از طرف دیگر می دانیم که طول هر دور ، از طول دور قبلی به اندازه q بزرگتر است. به این ترتیب :

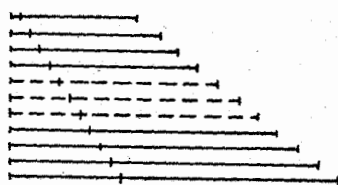
$$q' = \frac{1}{4}q = \frac{D-d}{4n} \pi ,$$

$$\begin{aligned} l'_1 &= \frac{1}{2}(l_1 - q') = \frac{1}{2} \left[\frac{(2n-1)d+D}{2n} \pi - \frac{D-d}{4n} \pi \right] = \\ &= \frac{\pi}{4n} [(2n-1)d+D] \end{aligned}$$

حالا دیگر به سادگی طول هر قطعه از نوار جدید، بدست می آید.

سؤالی پیش می آید : بریدگیهای جدید نوار، روی میله چگونه قرار گرفته اند؟ آیا آنها هم روی يك شعاع قرار دارند؟ نه! زیرا، بعد از برش اول (روی شعاع)، هر برش دیگری که روی شعاع به وجود آید، هر

دور را به دو قسمت می‌کند، که البته نسبت آنها به یکدیگر، بستگی به جای برش دوم دارد، ولی این نسبت، برای همه دورها یکی است؛ درحالی که برای ما باید تفاضل این دو قطعه، مقدار ثابتی باشد (مساوی q')، بنابراین نسبت آنها نمی‌تواند مقدار ثابتی شود. برش دوم روی يك منحنی (شبيه يك پيچ) قرار دارد.



شکل ۱۰۴

طریق دوم . n جمله اول
تصاعد مورد نظر، به ترتیب
مساوی یکی از قطعه‌های دور
اول، دور دوم، ... و دور n ام
است؛ جمله $(n+1)$ ام
تصاعد مورد نظر مساوی

باقیمانده نوار دور اول، جمله $(n+2)$ ام مساوی باقیمانده نوار دور دوم و غیره (شکل ۱۰۴).

در این حالت، جمله k ام تصاعد (که در آن $k \leq n$)، به اندازه q'' از جمله $(k-1)$ ام بزرگتر است (q'' قدر نسبت تصاعد مجهول است). به همین ترتیب جمله $(k+n)$ ام به اندازه q'' از جمله $(k+n-1)$ ام بزرگتر است. به این ترتیب:

$$(a_k + a_{k+n}) - (a_{k-1} + a_{k+n-1}) = 2q''$$

ولی $a_k + a_{k+n}$ ، طول k امین دور نوار؛ $a_{k-1} + a_{k+n-1}$ ، طول $(k-1)$ امین دور نوار است، از اینجا نتیجه می‌شود که قدر نسبت تصاعد مجهول، مساوی نصف قدر نسبت تصاعد اول است، یعنی

$$q'' = \frac{1}{2}q = \frac{D-d}{2n}\pi$$

جمله اول تصاعد جدید را l''_1 می‌نامیم، چون داریم: $l''_1 + l''_{n+1} = l_1$

$$l''_1 + l''_n + nq'' = \frac{(2n-1)d + D}{2n}\pi \text{ یعنی}$$

بنابراین:

$$2l''_1 = \frac{\pi}{2n} [(2n-1)d + D - nD + nd] ;$$

$$l''_1 = \frac{\pi}{4n} [(3n-1)d - (n-1)D] ;$$

$$l''_n = l''_1 + (n-1)q'' = \frac{\pi}{4n} [(3n-1)d - (n-1)D] + \\ + \frac{n-1}{2n} (D-d)\pi = \frac{\pi}{4n} [(n-1)d + (n-3)D] ;$$

$$l''_{n+1} = l''_1 + nq'' = \frac{\pi}{4n} [(n-1)d + (n+1)D]$$

ولی این جواب، برای هر مقدار دلخواه d ، D و n قابل قبول نیست.
شرط وجود جواب این است که $l_1 \leq n$ ، q'' باشد، یعنی :

$$\frac{D-d}{2n} \pi n \leq \left| \frac{(2n-1)d + D}{2n} \pi \right| ;$$

$$(D-d)n \leq (2n-1)d + D ;$$

$$(n-1)D \leq (3n-1)d \Rightarrow d \geq \frac{n-1}{3n-1} D$$

برای $q'' \cdot n = l_1$ ، باید داشته باشیم : $l''_1 = 0$ ، یعنی :

$$\frac{\pi}{4n} [(3n-1)d - (n-1)D] = 0$$

و یا $(3n-1)d = (n-1)D$. این شرط، از رابطه زیر هم نتیجه می‌شد :

$$d = \frac{n-1}{3n-1} D$$

برای حالت‌های خاصی که n مساوی ۲ یا ۳ یا ۴ است، باید به ترتیب

$$داشته باشیم : $d \geq \frac{1}{5} D$ یا $d \geq \frac{1}{4} D$ یا $d \geq \frac{3}{11} D$.$$

شرط وجود جواب را، به این صورت هم می‌توان نوشت :

$$n \leq \frac{D-d}{D-3d} \quad (n \text{ عددی است صحیح})$$

دو پاره‌خطی که از برش هردور نوار، در این حالت بدست می‌آید،

به اندازه مقدار ثابت $nq'' = \frac{D-d}{2}\pi$ با هم اختلاف دارند، و

بنابراین مثل حالت اول، در اینجا هم برش دوم روی شعاع نمی‌تواند باشد و روی يك منحنی قرار گرفته است.

۲۱۹. a فرض می‌کنیم $a \leq b$ باشد، در این صورت بزرگترین مربعی که می‌تواند وجود داشته باشد، به ضلع مساوی a است. بنابراین، در داخل مستطیل مفروض (با خط‌هایی که موازی ضلعهای آن رسم کرده‌ایم)، مربعهایی با ضلعهای مساوی ۱، ۲، ۳، ... و a واحد به وجود می‌آید. روی هم چند مربع خواهد بود؟ جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

تعداد مربعهای به ضلع واحد $= a.b$ ،

تعداد مربعهای به ضلع ۲ واحد $= (a-1)(b-1) =$
 $= ab - (a+b) + 1$ ،

تعداد مربعهای به ضلع ۳ واحد $= (a-2)(b-2) =$
 $= ab - 2(a+b) + 2^2$ ،

.....

تعداد مربعهای به ضلع a واحد $= [a - (a-1)][b - (a-1)] =$
 $= ab - (a-1)(a+b) + (a-1)^2$

و اگر تعداد همه مربعها را Σ بنامیم، داریم:

$$\Sigma = ab.a - [0 + 1 + 2 + \dots + (a-1)].(a+b) +$$

$$+ [0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + (a-1)^2] =$$

$$= a^2b - \frac{a-1}{2}a(a+b) + \frac{2a^2 - 3a + 1}{6}a =$$

$$= a \left[ab - \frac{a-1}{2}(a+b) + \frac{2a^2 - 3a + 1}{6} \right] =$$

$$= \frac{a}{6} (6ab - 3a^2 - 3ab + 3a + 3b + 2a^2 - 3a + 1) =$$

$$= \frac{a(a+1)}{6} (3b - a + 1)$$

این رابطه ، برای موقعی هم که متوازی الاضلاع را به لوزیهایی تقسیم کنیم، درست است.

(b) جواب برای $a \leq c$ ، $a \leq b$:

$$\Sigma = \frac{a(a+1)}{12} \{6bc - (a-1)[2(b+c) - a]\}$$

(c) فرض می کنیم a ، کوچکترین عدد، بین عددهای $a, b, c, \dots, k, l, m$ باشد. جدول را تشکیل می دهیم :

$abc \dots klm$ ، تعداد شکلای به ضلع واحد

$= (a-1)(b-1)(c-1) \dots (k-1)(l-1)(m-1)$ ،
تعداد شکلای به ضلع ۲ واحد

$= (a-2)(b-2)(c-2) \dots (k-2)(l-2)(m-2)$ ،
تعداد شکلای به ضلع ۳ واحد

$= [a - (a-3)][b - (a-3)] \times$
 $\times [c - (a-3)] \dots [k - (a-3)] \times$
 $\times [l - (a-3)][m - (a-3)]$ ،
تعداد شکلای به ضلع $(a-2)$ واحد

$= [a - (a-2)][b - (a-2)] \times$
 $\times [c - (a-2)] \dots [k - (a-2)] \times$
 $[l - (a-2)][m - (a-2)]$
تعداد شکلای به ضلع $(a-1)$ واحد

$= [a - (a-1)][b - (a-1)] \times$
 $\times [c - (a-1)] \dots [k - (a-1)] \times$
 $[l - (a-1)][m - (a-1)]$
تعداد شکلای به ضلع a واحد

حاصلضرب $abc \dots klm$ را s و تعداد کل همه شکلها را Σ_n می نامیم،
داریم:

$$\begin{aligned} \Sigma_n = & as - \left[1 + 2 + \dots + (a-1) \right] \left[\frac{s}{a} + \frac{s}{b} + \dots + \right. \\ & \left. + \frac{s}{l} + \frac{s}{m} \right] + \left[1^2 + 2^2 + \dots + (a-1)^2 \right] \left[\frac{s}{ab} + \right. \\ & \left. + \frac{s}{ac} + \dots + \frac{s}{lm} \right] - \left[1^3 + 2^3 + \dots + (a-1)^3 \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{s}{abc} + \frac{s}{abd} + \dots + \frac{s}{klm} \right] + \dots + (-1)^{n-1} \times \\
& \times \left[1^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + (a-1)^{n-1} \right] (a+b+\dots+ \\
& + m) + (-1)^n \left[1^n + 2^n + \dots + (a-1)^n \right] = \\
& = as - \frac{a(a-1)}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{m} \right) s + \\
& + \frac{a(a-1)}{2} \cdot \frac{2(a-1)}{2} \times \left[\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \dots + \frac{1}{lm} \right] s - \\
& - \frac{a(a-1)}{2} \cdot \frac{a(a-1)}{2} \left[\frac{1}{abc} + \dots + \frac{2}{klm} \right] s + \\
& + \dots + (-1)^n \left[1^n + 2^n + \dots + (a-1)^n \right] = \\
& a \left[1 - \frac{a-1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{m} \right) + \right. \\
& + \frac{a(a-1)}{2} \cdot \frac{2a-1}{2} \left(\frac{1}{ab} + \dots + \frac{1}{lm} \right) - \dots \left. \right] s + \\
& + (-1)^n \left[1^n + 2^n + \dots + (a-1)^n \right]
\end{aligned}$$

برای حالت خاص $a=b=c\dots=k=l=m$ داریم :

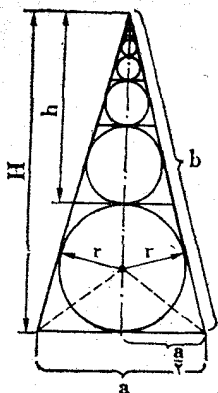
$$\Sigma_n = 1^n + 2^n + \dots + a^n$$

۲۲۰. شعاع دایره محاط در مثلث متساوی الساقین (منظور اولین دایره

است)، برابر است با (شکل ۱۰۵) :

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)^2}{p}} = (p-b) \sqrt{\frac{p-a}{p}} = \\
&= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{p-a}{p}}
\end{aligned}$$

و مساحت این دایره محاطی چنین می شود :



شکل ۱۵۵

$$S_0 = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p-a}{p} \cdot a^2$$

$$h = H - 2r = H - a \sqrt{\frac{p-a}{p}} \quad \text{سپس}$$

و بالاخره

$$\begin{aligned} h \div H &= 1 - \frac{a^2 \sqrt{p-a}}{2 \sqrt{p} \cdot \sqrt{p(p-a)} (p-b)^2} = \\ &= 1 - \frac{a^2}{2p(p-b)} = 1 - \frac{a^2}{p \cdot a} = \\ &= 1 - \frac{a}{p} = \frac{p-a}{p} \end{aligned}$$

مثلثهای متساوی الساقینی که از مثلث متساوی الساقین مفروض، با رسم مماس بر دایرهٔ محاطی آن به موازات قاعده، بدست می‌آیند، با هم متشابه‌اند. عنصرهای خطی هر مثلث بعدی، نسبت به عنصرهای نظیر در مثلث قبلی، به نسبت $h \div H$ هستند، یعنی عنصرهای متناظر

مثلثها، يك تصاعد هندسی نزولی با قدرنسبت $q = \frac{p-a}{p}$ تشکیل

می‌دهند. بنابراین، مساحت‌های این مثلثها (همچنین دایره‌های محاطی

آنها)، يك تصاعد هندسی نزولی با قدرنسبت $q_0 = q^2 = \frac{(p-a)^2}{p^2}$

تشکیل می‌دهند. به این ترتیب باید مجموع بی‌نهایت جمله از يك تصاعد هندسی نزولی را که جملهٔ اول آن a_1 است محاسبه می‌کنیم:

$$a_1 = S_0 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p-a}{p} \cdot a^2$$

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{a_1}{1-q_0} = \frac{\pi(p-a)a^2}{4p \left[1 - \frac{(p-a)^2}{p^2} \right]} = \\ &= \frac{\pi(p-a)a^2 p}{4[p^2 - p^2 + 2ap - a^2]} = \frac{\pi(p-a)ap}{4(2p-a)} = \\ &= \frac{\pi(p-a)ap}{8b} \end{aligned}$$

اگر شعاع دایره مطلوب را R_0 بگیریم، داریم :

$$\pi R_0^2 = \frac{\pi(p-a)ap}{\wedge b} \Rightarrow R_0 = \sqrt{\frac{(p-a)pa}{\wedge b}}$$

داخل دیگر، مساحت اولین ذوزنقه :

$$S_T = \left[1 - \left(\frac{h}{H} \right)^2 \right] S_\Delta = \left[1 - \left(\frac{p-a}{p} \right)^2 \right] S_\Delta = \frac{2ab}{p^2} S_\Delta$$

آن قسمت از مساحت ذوزنقه، که به وسیله دایره اشغال می شود :

$$\sigma = \frac{S_0}{S_T} = \frac{\pi(p-a)a^2 p^2}{4p \cdot 2ab \cdot S_\Delta} = \frac{\pi(p-a)ap}{\wedge b \cdot S_\Delta}$$

چون همه ذوزنقه های متوالی با دایره هایی که در آنها محاط هستند، با ذوزنقه اول و دایره محاط در آن متشابه اند، این نسبت برای همه ذوزنقه ها، و در نتیجه برای مجموع آنها، درست است. به این ترتیب مجموع مساحت های همه دایره های محاطی برابر است با :

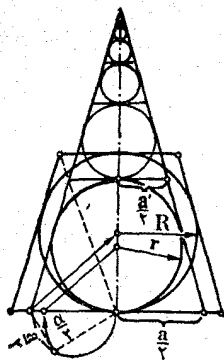
$$\sigma \cdot S_\Delta = \frac{\pi(p-a)p}{\wedge} \cdot \frac{a}{b}$$

واز آنجا :

$$R_0 = \sqrt{\frac{\sigma S_\Delta}{\pi}} = \sqrt{\frac{(p-a)p}{\wedge} \cdot \frac{a}{b}} = \sqrt{\left(b^2 - \frac{a^2}{4} \right) \frac{a}{\wedge b}} = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{a}{2b}}$$

روش ساختن دایره مطلوب، به این ترتیب، مثلث متساوی الساقین مفروض، به وسیله يك دستگاه خط های موازی با قاعده، به ذوزنقه های متساوی الساقینی تقسیم می شود، که در هر کدام از آنها دایره ای محاط شده است و مساحت هر يك از این دایره ها قسمت مشخصی از مساحت ذوزنقه مربوطه را اشغال می کند و این نسبت ارتباطی به

اندازه‌های دوزنقه ندارد. بنابراین، مجموع مساحت‌های همه دایره‌های محاط در دوزنقه‌ها، برابر است با مساحت دایره‌ای که در دوزنقه متساوی‌الساقینی متشابه با این دوزنقه‌ها محاط باشد و بخصوص مساحت این دوزنقه برابر با مساحت همه دوزنقه‌ها، یعنی مساوی مساحت مثلث مفروض باشد.



شکل ۱۰۶

مثلث متشابه است و بنابراین مساحت‌های آنها بر نسبت مجذور نسبت عنصرهای خطی آنهاست :

$$\left. \begin{aligned} F &= \psi L^2 \\ f &= \psi l^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varphi &= F - f = \psi(L^2 - l^2) = \psi\lambda^2 \\ (\lambda^2 &= L^2 - l^2) \end{aligned}$$

شعاع دایره‌ای را که در دوزنقه مجهول محاط است R ، و شعاع دایره محاط در اولین دوزنقه را r می‌گیریم. در این صورت داریم :

$$F \div \varphi = R^2 \div r^2 ; R^2 = \frac{F}{\varphi} r^2 = \frac{L^2}{\lambda^2} r^2 ; R = \frac{R}{\lambda} r$$

به عنوان عنصر خطی نزولی، نصف قاعده مثلث‌های متشابه را انتخاب

می‌کنیم $\left(\frac{a}{2} \text{ و } \frac{a'}{2}\right)$ ، در این صورت :

$$R = \frac{a \div 2}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a'}{2}\right)^2}} r$$

از اینجا روش رسم روشن می‌شود (شکل ۱۰۶). روی نصف قاعده

مثلث مفروض $\left(\frac{a}{2}\right)$ ، نیم‌دایره‌ای می‌سازیم. در این نیم‌دایره، مثلث

قائم‌الزاویه‌ای محاط می‌کنیم که یکی از ضلع‌های مجاور به زاویه قائمه

آن مساوی $\frac{a}{2}$ و ضلع دیگر مجاور به زاویه قائمه آن مساوی $\frac{a}{2}$

باشد (α) قاعده مثلث متساوی الساقینی است که متشابه با مثلث مفروض و معادل اولین دوزنقه است). از مرکز قاعده مثلث، پاره خطی

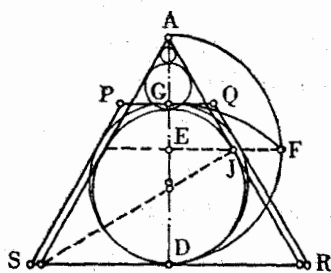
مساوی $\frac{a}{2}$ جدا می کنیم و از نقطه ای که بدست می آید به مرکز

اولین دایره محاطی وصل می کنیم، از رأس مجاور به قاعده مثلث مفروض، نیم خطی موازی این خط رسم می کنیم، مرکز دایره مورد نظر بدست می آید، که از آنجا به سادگی شعاع و خود دایره پیدا می شود.

در شکل ۱۰۶، علاوه بر آن، دوزنقه معادل مثلث مفروض هم رسم شده است.

حالت خاص. حالت خاصی را، که مثلث متساوی الاضلاع باشد، بررسی می کنیم. از نقطه تماس هر دو دایره محاطی متوالی، مماس

مشترک دو دایره را، که موازی با قاعده مثلث می شود، رسم می کنیم؛ در این صورت مثلث متساوی الاضلاع مفروض به دوزنقه های متساوی الساقینی تقسیم می شود، که در هر کدام از آنها، دایره ای محاط شده است. چون این دوزنقه ها



شکل ۱۰۷

همراه با دایره های محاطی آنها، شکلهای متشابهی هستند، نسبت مساحت هر دایره به مساحت دوزنقه محیطی آن، برای همه شکلهای مقدار ثابتی است.

بنابراین نسبت مجموع مساحت های همه دایره ها به مجموع مساحت های دوزنقه ها (یعنی مساحت مثلث مفروض) هم مساوی همین مقدار ثابت می شود. از طرف دیگر، مساحت هریک از دوزنقه ها، برابر است با دو

برابر مساحت مثلث متساوی الاضلاعی که ارتفاعش برابر با ارتفاع دوزنقه (یعنی قطر دایره محاطی) باشد (چرا؟). مساحت دوزنقه‌ای که بر دایره مورد جستجو محیط باشد (و ضمناً با بقیه دوزنقه‌ها متشابه هم باشد)، باید مساوی مساحت مثلث مفروض باشد؛ پس نصف مساحت دوزنقه مجهول (شکل این نصف مساحت، يك مثلث متساوی الاضلاع است)، بسايد مساوی نصف مساحت مثلث متساوی الاضلاع مفروض باشد. در این صورت، نسبت ارتفاع دوزنقه مجهول به ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع مفروض، برابر است با $\frac{1}{\sqrt{2}}$. طریقه رسم، از شکل ۱۰۷ معلوم است:

$$1 \div \sqrt{2} = \sqrt{2} \div 2$$

به قطر ارتفاع AD ، نیمدایره AFD را رسم می‌کنیم. از نقطه E ، عمود EF را بر AD اخراج می‌کنیم (این عمود، از نقطه J ، نقطه تماس دایره محاطی مثلث می‌گذرد). روی ارتفاع AD ، نقطه G را به فاصله DF از نقطه D ، معین می‌کنیم. DG ارتفاع دوزنقه $PQRS$ است، که مساحت آن برابر است با مساحت مثلث متساوی-الاضلاع مفروض. بنابراین، دایره مورد نظر، دایره‌ای به قطر DG است (مساحت این دایره برابر است با مجموع مساحت‌های بی‌نهایت دایره‌ای که در مثلث متساوی الاضلاع مفروض محاط شده‌اند). برای مثلث متساوی الاضلاع داریم:

$$R_o = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} a ; S_o = \pi R^2 = \frac{3\pi}{32} a^2 ; S_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 ;$$

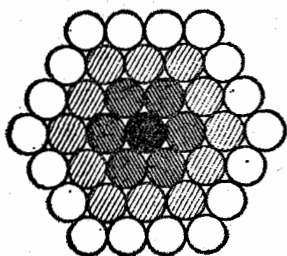
$$\sigma = \frac{S_o}{S_{\Delta}} = \frac{3\pi \times 4}{32\sqrt{3}} = \frac{3\pi}{8\sqrt{3}} \approx 0.7$$

(b) برای پاسخ به سؤال مسأله، کافی است مجموعه دوزنقه‌های متساوی الساقینی را بررسی کنیم، که بريك دایره محیط هستند؛ مساحت هر يك از این دوزنقه‌ها، برابر است با حاصلضرب ارتفاع (یعنی قطر دایره)، در خط میانه دوزنقه (یعنی خطی که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند)؛ از آنجا که ارتفاع همه دوزنقه‌ها یکی است،

نسبت مساحت دوزنقه‌ها مساوی نسبت خط میانه آنها می‌شود. کوچکترین خط میانه، مربوط به حالتی است که دوزنقه به مربع تبدیل شود؛ در این حالت، مساحت دوزنقه محیط بردایره، به حداقل خود می‌رسد و بنابراین نسبت مساحت دوزنقه، حداکثر می‌شود: این نسبت برابر است با $\pi \div 4 = 0.785 \dots$ با بزرگ شدن زاویه رأس، خط میانه دوزنقه و بنابراین مساحت آن بزرگ می‌شود؛ و در این وضع، «اشغال» مساحت دوزنقه، به وسیله دایره (یعنی «اشغال» مساحت مثلث، به وسیله دایره‌های محاطی)، رو به کاهش می‌رود (و به سمت صفر میل می‌کند).

(c) بررسی این حالت به حالت‌های قبل منجر می‌شود.

۲۲۱. a) هر کمر بند، از دایره‌هایی تشکیل شده است، که مرکزهای آنها، بر ضلع‌های یک شش ضلعی منتظم، قرار گرفته‌اند. تعداد دایره‌هایی که در هر ضلع یکی از شش ضلعیها قرار دارد، یکی بیشتر از تعداد



شکل ۱۰۸

دایره‌هایی است که در یک ضلع شش ضلعی قبلی، قرار گرفته است (شکل ۱۰۸) بنابراین، تعداد دایره‌ها، در کمر بندهای متوالی، تشکیل یک تصاعد عددی، با قدر نسبت $d = 6$ و جمله اول $a_1 = 6$ ، می‌دهند. در نتیجه:

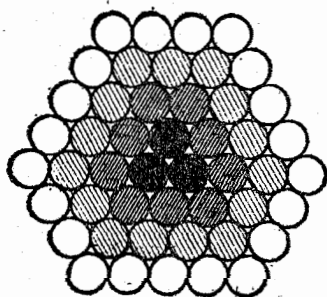
$$a_n = 6 + (n - 1)6 = 6n,$$

$$\Sigma = \frac{a_1 + a_n}{2} n = 3(n + 1)n$$

که با اضافه کردن یک دایره

«هسته» بدست می‌آید:

$$N_n + 3n^2 + 3n + 1$$



شکل ۱۰۹

(b) در هسته : 3×1 دایره

کمر بند اول : 3×3 دایره

کمر بند دوم : 3×5 دایره

.....

و از آنجا بدست می آید :

$$\Sigma = 3[1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)] =$$

$$= 3 \times \frac{1 + 2n + 1}{2} (n + 1) = 3(n + 1)^2$$

اگر به عنوان «هسته»، چهار دایره انتخاب کنیم، به نحوی که مرکزهای آنها، رأسهای یک مربع و هر دایره بر دو دایره دیگر مماس باشد، شکل حاصل از کمر بندها، چگونه می شود؟

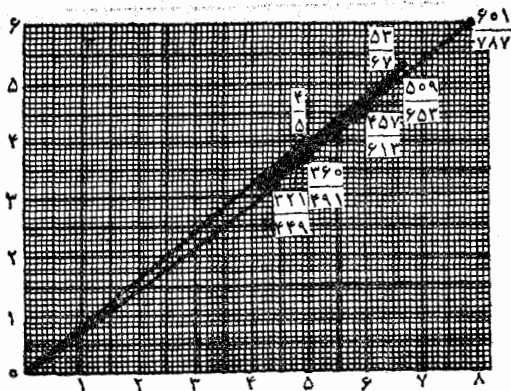
۲۲۲. می دانیم که برای مقایسه دو کسر، می توان آنها را به یک مخرج تبدیل کرد؛ ولی در اینجا، برای این γ کسر، چه راهی ساده تر است: آیا ابتدا، آنها را دو به دو با هم مقایسه کنیم، سپس دو به دو بعدی را، یا یکی از کسرها را با همه کسرها، بطور جداگانه مقایسه کنیم و بعد کسر دوم را با بقیه کسرها و غیره، یا همه کسرها را به یک مخرج تبدیل کنیم و یکباره، همه را با هم مقایسه کنیم؟ ضمناً، خوب است بدانیم که در حالت اخیر، کوچکترین مخرج مشترک کسرها، چنین است :

$$5 \times 67 \times 449 \times 494 \times 613 \times 653 \times 787 =$$

$$= 23 \ 265 \ 962 \ 743 \ 872 \ 895$$

ما در اینجا، برای مقایسه کسرها، از روش نمودار، استفاده می کنیم (شکل ۱۱۰).

اگر در صفحه محورها، مختصات، نقطه ای پیدا کنیم که طول و عرض آن به ترتیب مساوی مخرج و صورت یک کسر باشد، ضریب زاویه خطی که از مبدأ مختصات و این نقطه می گذرد، برابر با کسر مفروض می شود. هرچه زاویه بین این خط و محور طول بزرگتر باشد (از ۰ تا ۹۰ درجه تجاوز نمی کند)، تانژانت این زاویه بزرگتر می شود،



شکل ۱۱۰

و در نتیجه کسر مفروض هم بزرگتر خواهد شد. ما هم مسأله را، بر همین اساس حل می‌کنیم.

برای پیدا کردن نقطه‌های متناظر با کسرها، بهتر است از کاغذ میلیمتری استفاده کنیم. اندازه‌های این کاغذ، چقدر باید باشد؟ صورت کسرهای مفروض از ۴ تا ۶۰۱ و مخرج آنها از ۵ تا ۷۸۷ است؛ بنابراین به نظر می‌رسد که باید اندازه‌های کاغذ خیلی بزرگ باشد؛ ولی از این خاصیت استفاده می‌کنیم که اگر صورت و مخرج کسر را به یک نسبت کوچک کنیم، مقدار آن تغییری نمی‌کند، مثلاً

کسر $\frac{۵۳}{۶۷}$ را به کسر $\frac{۵/۳}{۶/۷}$ تبدیل می‌کنیم؛ به جای کسر

$\frac{۵۰۹}{۶۵۳}$ ، کسر $\frac{۵/۰۹}{۶/۵۳}$ را در نظر می‌گیریم و غیره. به این ترتیب،

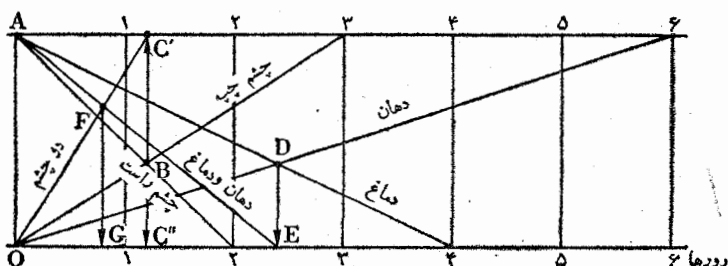
همه نقطه‌ها را در یک برگ معمولی کاغذ، می‌توان مشخص کرد.

روشن است که در نمودار، جای نقطه‌ها، به هر حال با تقریب پیدا می‌شود؛ بنابراین اگر مقدار دو کسر خیلی به هم نزدیک باشد، ممکن است به کمک نمودار نتوان با دقت آنها را با هم مقایسه کرد؛ در چنین وضعی بهتر است، کسرهایی را که از لحاظ مقدار، خیلی به هم نزدیکند، با روش معمولی تبدیل به یک مخرج، با هم مقایسه کرد.

ولی در مورد کسرهای مورد نظر ما ، نمودار به خوبی نشان می دهد
 که کوچکترین آنها $\frac{321}{449}$ است، بعد از آن کسر $\frac{360}{491}$ قرار گرفته
 است و غیره.

۲۲۳. نمودار را در دستگاه « زمان - حجم آب » در نظر می گیریم
 (شکل ۱۱۱).

پاره خط OA متناظر با حجم حوض است . «چشم راست ، حوض را
 در ۲ روز پرمی کند»، متناظر با خط $A-2$ ؛ «چشم چپ ، حوض را
 در ۳ روز پرمی کند»، متناظر با خط $O-3$.



شکل ۱۱۱

نقطه B ، محل برخورد $A-2$ و $O-3$ را در نظر می گیریم .
 پاره خط BC' ، نماینده مقدار آبی است که از چشم راست ، در فاصله
 زمانی AC' ، وارد حوض شده است؛ به همین ترتیب ، پاره خط BC'' ،
 نماینده مقدار آبی است که در همان فاصله زمانی ، از چشم چپ وارد
 حوض شده است . بنابراین پاره خط $AC' (= OC'')$ نماینده زمانی
 است که هر دو چشم ، در آن مدت ، تمام حوض را پرمی کنند. به این
 ترتیب ، OC' نمودار کار دو چشم با هم است.

به همین ترتیب نمودار کار دهان $(O-6)$ و دماغ $(A-4)$ را
 رسم می کنیم و به کمک نقطه D (محل برخورد این دو نمودار) ،
 AE ، یعنی نمودار کار مشترک دهان و دماغ را رسم می کنیم.
 با جمع نمودارهای OC' و AE (که در نقطه F به هم برمی خورند) ،
 پاره خط OG بدست می آید (G تصویر نقطه F روی محور زمان

است)، و نمودار فاصله زمانی است، که در آن با باز بودن هر چهار مسیر، حوض پرمی شود.

روی شکل دیده می شود که: $OG = \frac{4}{5} (O - 1)$. بنابراین حوض

در $\frac{4}{5}$ شبانه روز، یعنی ۱۹ ساعت و ۱۲ دقیقه پرمی شود.

۲۲۴. چون سه اتومبیل با هم به B رسیده اند، و از آنجا به طرف C ، بدون وقفه، حرکت کرده اند، و چون بنا بر فرض مسأله، اتومبیلها، در فاصله های زمانی مساوی، حرکت کرده اند، در هر نقطه ای (و منجمله در نقطه C)، به فاصله های زمانی مساوی از یکدیگرند (منتهی از نقطه B به بعد، در ردیف عکس). بنا بر فرض مسأله، اتومبیل اول، یک ساعت بعد از اتومبیل دوم به C می رسد؛ بنابراین اتومبیل سوم، یک ساعت قبل از اتومبیل دوم، به C می رسد، یعنی اتومبیل اول ۲ ساعت بعد از اتومبیل سوم به C می رسد. به ماشین دوم و فاصله AB ، بیش از این نیازی نداریم و می توان مسأله را به این ترتیب منظم کرد: «از نقطه B ، در یک زمان، دو اتومبیل شماره ۱ و شماره ۳، حرکت کردند؛ اتومبیل شماره ۳ به محض اینکه به نقطه C رسید ($BC = ۱۲۰ \text{ km}$)، برگشت و در ۴۰ کیلومتری نقطه C ، به اتومبیل شماره ۱ برخورد کرد، ضمناً می دانیم که اتومبیل شماره ۱، دو ساعت بعد از اتومبیل شماره ۳، به نقطه C رسیده است».

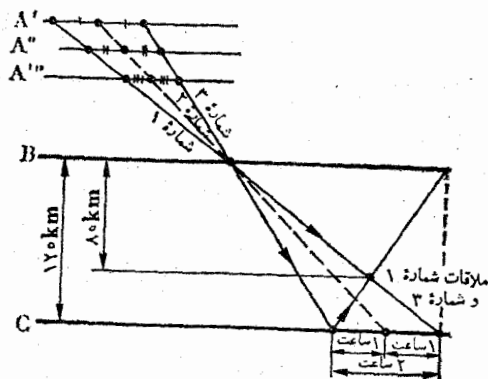
اتومبیلها، از نقطه B ، با هم شروع به حرکت کردند. تا لحظه برخورد، اتومبیل شماره ۱، ۸۰ کیلومتر ($۱۲۰ - ۴۰$) و اتومبیل شماره ۳، ۱۶۰ کیلومتر ($۱۲۰ + ۴۰$)، حرکت کرده اند. بنابراین سرعت اتومبیل شماره ۳ مساوی ۲ برابر ($۱۶۰ \div ۸۰$) سرعت اتومبیل شماره ۱ است.

در دو ساعتی که از زمان رسیدن شماره ۳ به C تا رسیدن شماره ۱ به C ، طول کشیده است؛ اولاً شماره ۳ به اندازه ۴۰ کیلومتر (در جهت از C به B)

رفته است، سپس شماره ۱، همین فاصله را (در جهت از B به C)، طی کرده است. از آنجا که سرعت اتومبیل شماره ۳، دو برابر سرعت اتومبیل شماره ۱ است، بنابراین زمانی را که شماره ۳ برای پیمودن ۴۰ کیلومتر صرف می کند، نصف زمانی است که شماره ۱، برای طی همین فاصله، لازم دارد. به این ترتیب، اتومبیل شماره ۱، برای پیمودن این فاصله $۲ \times \frac{۲}{۱+۲}$ ، یعنی $\frac{۴}{۳}$ ساعت صرف وقت کرده است.

اتومبیل شماره ۱، فاصله ۴۰ کیلومتری را در $\frac{۴}{۳}$ ساعت طی کرده است و بنابراین، سرعتی مساوی $\frac{۴}{۳} \div ۴۰$ ، یعنی ۳۰ کیلومتر در ساعت داشته است.

همه آنچه را که گفتیم، می توان به روشنی و از روی شکل دید (شکل ۱۱۲). فاصله AB داده نشده است و نمی توان آنرا پیدا کرد، بنابراین جای نقطه A را روی شکل، می توان در A'، A'' یا A''' و یا هر نقطه دیگری گرفت.



شکل ۱۱۲

۲۲۵. a) سرعت دوچرخه سوار اول را v ، سرعت دوچرخه سوار دوم را w و فاصله AB را L می گیریم. در این صورت داریم :

تا دومین ملاقات	تا اولین ملاقات	
$L+3$	۵	راهی که دوچرخه سوار اول رفته است (به کیلومتر)
$(L+3)\frac{w}{v}$	$5 \times \frac{w}{v}$	راهی که دوچرخه سوار دوم رفته است (به کیلومتر)
$3L$	L	راهی که هر دو روی هم رفته اند (به کیلومتر)

از اینجا، دو معادله بدست می آید :

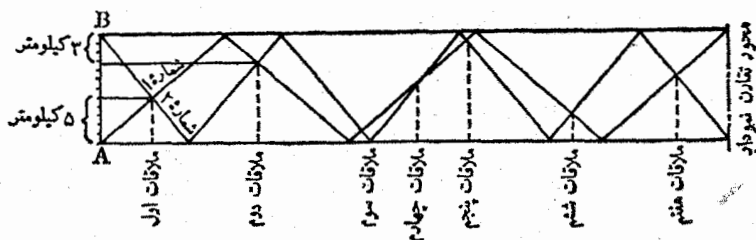
$$5\left(1 + \frac{w}{v}\right) = L \quad (1)$$

$$(L+3)\left(1 + \frac{w}{v}\right) = 3L \quad (2)$$

از تقسیم (۲) بر (۱) بدست می آید :

$$\frac{L+3}{5} = 3 \Rightarrow L+3 = 15 \Rightarrow L = 12 \text{ (کیلومتر)}$$

b) بهتر است حرکت دوچرخه سوارها را به کمک نمودار مجسم کنیم (شکل ۱۱۳).



شکل ۱۱۳

نمودار به خوبی نشان می دهد که بعد از ملاقات اول، دوچرخه سوارها تا ملاقات دوم، روی هم به اندازه دو برابر فاصله AB راه می روند؛ درست به همین ترتیب، در فاصله ملاقات دوم و سوم هم،

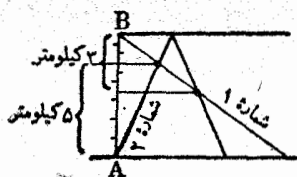
دو دوچرخه سوار روی هم به اندازه دو برابر فاصله AB حرکت می کنند. بنابراین فاصله زمانی بین ملاقات دوم و سوم برابر است با همان فاصله زمانی بین ملاقات اول و دوم.

ولی، اگر از اینجا این نتیجه را برای فاصله زمانی ملاقاتهای بعدی هم درست بدانیم، دچار اشتباه شده ایم. همانطور که از نمودار شکل ۱۱۳ دیده می شود، فاصله ملاقاتهای سوم و چهارم، همچنین فاصله بین ملاقاتهای چهارم و پنجم، به مراتب کوچکتر از دو فاصله اول است؛ مقدار این دو فاصله را می توان بدون اشکال بدست آورد: بین ملاقات سوم و ملاقات پنجم، دوچرخه سوارها به اندازه دو برابر فاصله AB راه رفته اند، بنابراین فاصله زمانی بین ملاقات سوم و پنجم، برابر است با فاصله زمانی بین ملاقات اول و دوم (و همچنین، ملاقات دوم و سوم). به این ترتیب، فاصله بین ملاقاتهای سوم و چهارم (همچنین فاصله بین ملاقاتهای چهارم و پنجم)، برابر است با نصف فاصله بین ملاقاتهای اول و دوم (یا دوم و سوم).

ملاقات چهارم کجا اتفاق می افتد؟ بدون هیچ محاسبه و یا ترسیم اضافی، از روی شکل ۱۱۳ معلوم می شود که ملاقات چهارم، درست در وسط فاصله A و B انجام می گیرد. (متذکر می شویم که روی شکل، نقطه متناظر با ملاقات چهارم، در مرکز تقارن نمودار قرار گرفته است.) به این ترتیب، دوچرخه سوار دوم (آنکه تندتر می رود)، در هر نیم دور (حرکت از A به B یا از B به A)، تنها یکبار با دوچرخه سوار دیگر ملاقات می کند؛ در حالی که دوچرخه سوار اول (آنکه سرعت کمتری دارد)، در هر نیم دور یا یکبار و یا سه بار (در نیم دورهای سوم و هشتم و غیره)، دوچرخه سوار دیگر را ملاقات می کند.

بعد از آنکه دوچرخه سوار اول، پنج دور کامل (و یا دوچرخه سوار دوم، هفت دور کامل)، حرکت کند، کاملاً به حالت اول برمی گردند و همین وضع، دوباره شروع می شود.

نمودار حرکت، بعد از پنج نیم دور اولی (و یا هفت نیم دور دومی)، قرینه محوری نموداری است که در شکل ۱۱۳، رسم شده است.



شکل ۱۱۴

يك توضیح. برای حل مسأله مربوط به دو دوچرخه سوار، فرض را بر این گرفتیم، که بین ملاقات اول و دوم، هر يك از دوچرخه سوارها، يك

دور در جهت عکس حرکت اولیه خود داشته اند؛ در حالی که چنین شرطی در صورت مسأله وجود ندارد. بنابراین، مسأله جواب دیگری هم دارد، که وجود آن از نمودار شکل ۱۱۴ پیدا است.

در این حالت، فاصله AB را پیدا کنید و جواب را بررسی نمایید.

۲۲۶. حل جبری مسأله، مشکل نیست. اگر مبلغی را که هر کدام به صندوق پس انداز سپرده اند، مساوی x و نرخ بهره پس انداز را y (یعنی ۱۰۰ ریال در یک سال به اندازه y ریال سود بدهد) فرض کنیم، به سادگی به دو معادله دو مجهولی زیر می رسیم:

$$\frac{mxy}{1200} = p - x \quad ; \quad \frac{nxy}{1200} = q - x$$

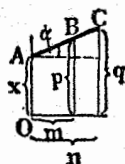
و از آنجا، به سادگی مقادیر x و y بدست می آید:

$$x = \frac{mq - np}{m - n} \quad , \quad y = \frac{1200(p - q)}{mq - np} \quad (1)$$

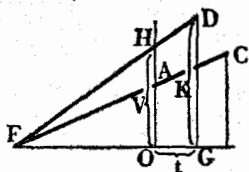
حالا به حل مسأله، به کمک ترسیم می پردازیم:

در دستگاه مختصات قائم «زمان - سرمایه»، برای ماه و ریال، واحدهای مساوی می گیریم و دو نقطه $B(m, p)$ و $C(n, q)$ را پیدا می کنیم؛ سپس این دو نقطه را به هم وصل می کنیم و امتداد می دهیم تا محور عرض را در نقطه A قطع کند (شکل ۱۱۵-ا).

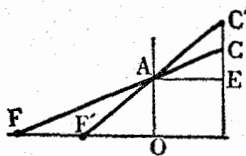
نقطه A نشان می دهد، که در لحظه صفر، مبلغ پس انداز مساوی OA ریال بوده است؛ از این لحظه، رشد یکنواخت مبلغ پس انداز شروع می شود؛ این رشد، به وسیله تمایل خط راست مشخص می شود، به نحوی که بعد از m ماه، مبلغ پس انداز (با بهره آن) به p ریال و بعد از n ماه به q ریال می رسد.



a)



b)



c)

شکل ۱۱۵

مسأله حل شده است :

۱. عرض نقطه A ، مبلغ مورد نظر سپرده است. اگر معادله خط BC را بنویسیم (بر حسب v - زمان و x - مبلغ سپرده)، و در آن $v = 0$ بگیریم، مقدار x (یعنی مبلغ مورد نظر سپرده، همان مقداری

که در رابطه (۱) بدست آوردیم، پیدا می شود: $OA = \frac{mq - np}{m - n}$

۲. تانژانت زاویه ای که نیم خط AC با محور طول می سازد، برابر

است با بهره مبلغ سپرده OA در یک ماه: $tga = \frac{p - q}{m - n}$. بنابر

این بهره OA ریال در یک سال ۱۲ برابر این مبلغ و بهره یک ریال

در یک سال به اندازه $\frac{1}{OA}$ مبلغ اخیر و بالاخره بهره ۱۰۰ ریال

در یک سال، ۱۰۰ برابر مبلغ آخری است؛ یعنی :

$$\text{نرخ بهره} = \frac{1200}{OA} tga = \frac{1200(p - q)}{mq - np}$$

به کمک رسم نمودار، می توان مسأله های دیگری را هم حل کرد، مثلاً: «اگر v ریال را برای مدت t ماه به حساب پس انداز بگذاریم؛

مبلغ k ، که صندوق پس انداز خواهد پرداخت، چقدر است؟»

پاره خط CA را امتداد می دهیم تا محور طول را در نقطه F قطع کند

(شکل ۱۱۵-ب). پاره خط OF ، زمانی را نشان می دهد که در جریان

آن، سپرده مفروض دو برابر می شود (یعنی زمانی که ضمن آن، مبلغ

بهره، مساوی مبلغ سپرده می شود). ولی نقطه F برای همه سپرده ها، مقدار ثابتی است. در اینجا، سپرده برابر است با v ؛ $OH = v$ را روی محور عرض جدا می کنیم و FH را امتداد می دهیم، نیم خط HD ، که به این ترتیب بدست می آید، رشد مقدار سپرده را، در جریان زمان، نشان می دهد. $OG = t$ را روی محور طول جدا می کنیم و

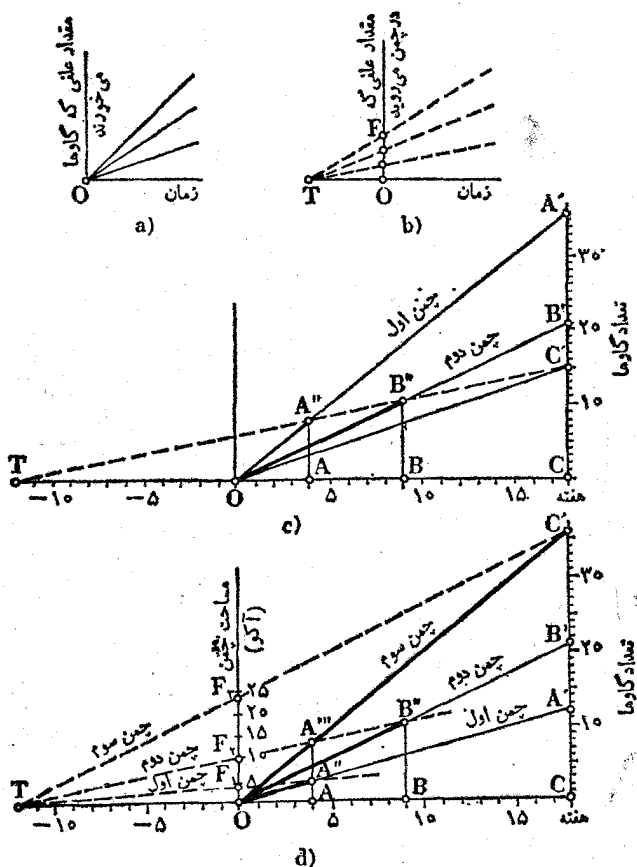
را موازی OH رسم می کنیم تا نقطه D بدست آید: $GD = k$ اگر نرخ بهره تغییر کند، نقطه F هم روی محور طول جابجا می شود؛ مثلاً اگر نرخ n برابر شود، نقطه F به نقطه F' می رود، به نحوی که $OF \div OF' = n$. در حقیقت (شکل ۱۱۵-۱)، طبق فرض باید داشته باشیم: $C'E \div CE = n$ ؛ از مثلثهای متشابه AOF و CEA نتیجه می شود: $CE \div EA = AO \div OF$ ، از تشابه دو مثلث AOF' و $C'EA$ نتیجه می شود: $C'E \div EA = AO \div OF'$ ، از آنجا $OF \div OF' = C'E \div CE = n$.

در حالت هایی که به مناسبت فرضهای خاص مسأله، مشکل خیلی بزرگ می شود، می توان واحد را روی دو محور، نامساوی گرفت. ضمناً روشن است که ما در این مسأله تنها به بهره کاری ساده توجه داشتیم و نه بهره کاری مرکب.

۲۲۷. محور طول را محور زمان (با واحد هفته) می گیریم و شروع زمان را از لحظه ای به حساب می آوریم که گاوها در چمن رها شده اند، محور عرض را هم برای مقدار علف می گیریم (واحد را مثلاً می توان، مقدار سهم هر گاو در یک هفته گرفت)؛ دو نمایش تغییرات در نظر می گیریم: نمایش تغییرات مقدار علفی که به وسیله گاوها خورده می شود - با خط کامل، نمایش تغییرات رشد علفها - با خط چین. نمایش تغییرات اول (شکل ۱۱۶-۱)، رابطه بین مقدار علفی را که گاوها مصرف می کنند، با تعداد هفته هایی که آنها در چمنزار بوده اند، نشان می دهد. چون مقدار علفی که هر گاو در یک هفته می خورد (و فعلاً برای ما مجهول است)، مقدار ثابتی است، این نمایش تغییرات، نیم خطی است که از مبدا مختصات می گذرد و ضریب زاویه آن

(تانژانت زاویه‌ای که با جهت مثبت محور طول می‌سازد)، با تعداد گاوها نسبت مستقیم دارد.

نمایش تغییرات دوم (شکل ۱۱۶-ب)، رابطه بین مقدار علفی را که در چمنزار رشد می‌کند، با تعداد هفته‌ها نشان می‌دهد؛ زمان از لحظه‌ای شروع می‌شود که علفها شروع به رشد کرده‌اند (این لحظه، روی محور زمان، به وسیله T نشان داده شده است که در سمت چپ نقطه O قرار گرفته است). چون مقدار علفی که در هر هفته می‌روید،



شکل ۱۱۶

مقدار ثابتی است (که برای ما مجهول است)، این نمایش تغییرات، نیم خطی است که از نقطه T می گذرد؛ ضریب زاویه این نیم خط، با مساحت چمن نسبت مستقیم دارد. مقدار علفی که در لحظه ورود گاوها به چمن، روئیده است، متناسب با پاره خطهای قائمی است که به نقطه O و محل برخورد نمایش تغییرات با محور عرض محدود می شود.

حل ترسیمی مسأله را، ابتدا برای حالت ساده ای در نظر می گیریم: در این حالت مساحت هر سه چمنزار را مساوی هم، و مثلاً مساوی مساحت چمنزار دوم فرض می کنیم. در این صورت فرضهای مسأله، چنین می شود:

تعداد هفته	تعداد گاوها	مساحت	چمن
۴	۳۰	۱۰	I
۹	۲۱	۱۰	II
۱۸	x	۱۰	III

نمایش تغییرات را رسم می کنیم (شکل ۱۱۶-۱۱۶). روی محور زمان، نقطه های A ، B و C را به ترتیب متناظر با ۴، ۹ و ۱۸ هفته انتخاب می کنیم. از نقطه C ، عمودی بر محور زمان اخراج می کنیم و روی آن با واحد دلخواه، تعداد گاوها را مشخص می کنیم: نقطه A' متناظر با ۳۶ گاو (چمن اول)، و نقطه B' متناظر با ۲۱ گاو است (چمن دوم)؛ بنابراین نیم خطهای OA' و OB' نمایش تغییرات مقدار علفی هستند که به وسیله گاوها به ترتیب در چمن اول و چمن دوم خورده شده است. ولی بنا بر فرض مسأله، تمام علف چمن اول در ۴ هفته، و تمام علف چمن دوم در ۹ هفته تمام شده است، بنابراین تنها پاره خطهای OA'' و OB'' از این نیم خطها، حقیقی هستند. پاره خطهای AA'' و BB'' (با مقیاسی)، نماینده مقدار علفی هستند که در چمنزار به مساحت ۱۰ آکر، به وسیله دو دسته گاو و زمانهای مربوطه خورده شده اند؛ ولی چون نمایش تغییرات مقدار علف چمنزار با مساحت معلوم، که به صورت تابعی از زمان است، خطی است

مستقیم، بنابراین خطی که از A'' و B'' عبور می کند، معرف نمایش تغییرات رشد علف در چمنزار است؛ روی این نمایش تغییرات، دو نقطه مشخص می کنیم: نقطه T ، که معرف لحظه ای است که از آن موقع، رشد علف شروع شده است (با اندازه گیری معلوم می شود که $TO = ۱۲$ هفته است)، و C' که پاره خط CC' را مشخص می کند و متناظر با تعداد گاوهایی است که ضمن ۱۰ هفته، تمام علف را در چمنزار به مساحت ۱۰ آکر می خورند. با اندازه گیری معلوم می شود که $CC' = ۱۵$ (گاو). این همان تعداد گاوهای چمنزار سوم، در حالت ساده شده است.

چون مساحت چمنزار سوم، در حقیقت به جای ۱۰ آکر، مساوی ۲۴ آکر است، تعداد مورد نظر گاوها برابر است با:

$$\frac{۲۴}{۱۰} \times ۱۵ = ۳۶ \quad (\text{گاو})$$

حالا مساله را، بدون ساده کردن آن، حل می کنیم.

روی محور افقی، نقطه های A ، B و C را به ترتیب متناظر با زمانی که گاوها در چمنزارها هستند: ۴، ۹ و ۱۸ هفته، انتخاب می کنیم (شکل ۱۱۶ - d). روی عمودی که از C بر محور افقی رسم می کنیم، نقطه های A' و B' را به ترتیب متناظر با تعداد گاوهای چمنزارهای اول و دوم، یعنی ۱۲ و ۲۱، علامت می گذاریم. نیم خطهای OA' و OB' ، نشان دهنده آهنگ مصرف علف در چمنزارهای اول و دوم، به وسیله گاوها است. بنابراین فرض، مساحت چمنزارهای اول و دوم متفاوت است: اولی $\frac{۱}{۳}$ آکر و دومی ۱۰ آکر. اگر

مساحت چمنزار اول، به جای $\frac{۱}{۳}$ آکر، مساوی ۱۰ آکر بود

(یعنی سه برابر)، در آن صورت مقدار علفی که در این چمن در لحظه مشخص شده به وسیله نقطه A ، رویده بود، با پاره خط $AA''' = ۳AA''$ معین می شد، نقطه های A''' و B''' روی نمایش تغییرات

دو چمن با مساحت‌های مساوی (۱۰ آکر) هستند؛ بنابراین نیم‌خطی که از این دو نقطه می‌گذرد، نمایش تغییرات رشد علف را در چمنزار به مساحت ۱۰ آکر نشان می‌دهد (که نقطه T ، لحظه شروع رشد علفها را نشان می‌دهد).

نیم‌خط $TA''B''$ ، محور عرض را در نقطه F_4 قطع می‌کند؛ پاره‌خط OF_4 مساحت چمنزار دوم را نشان می‌دهد (پاره‌خط OF_4 نماینده مساحت چمن اول است).

برای پیدا کردن نمایش تغییرات رشد علف در چمنزار سوم، باید روی محور عرض، نقطه F_3 را چنان مشخص کرد که پاره‌خط OF_3 نماینده مساحت چمنزار سوم باشد؛ طبق فرض، مساحت چمنزار سوم مساوی ۲۴ آکر است، یعنی $F_3O \div F_4O = 24 \div 10$. نیم‌خطی را که از T و F_3 می‌گذرد، رسم می‌کنیم. عرض نقطه C' روی این نیم‌خط، جواب مسأله است؛ روی چمنزار سوم باید ۳۶ گاو رها کرد.

به کمک نمایش تغییرات، نه تنها می‌توان جواب مسأله را بدست آورد: «چند گاو می‌توانند به مدت ۱۸ هفته در چمنزار به مساحت ۲۴ آکر چرا کنند؟»، بلکه برای پرسشهای دیگری هم می‌توان، جوابهای لازم را به سرعت پیدا کرد. مثلاً به این سؤال که: «اگر β گاو در چمنزار به مساحت α آکر رها کنیم، چند هفته می‌توانند چرا کنند؟»

کافی است دو نیم‌خط رسم کنیم: (۱) از نقطه T به نقطه F_α از محور عرض (عرض این نقطه مساوی α است)؛ (۲) نیم‌خطی که از نقطه O بگذرد و خط قائم نماینده «تعداد گاوها» را در نقطه‌ای به عرض β قطع کند.

طول نقطه برخورد این دو نیم‌خط، جواب مسأله است.

جواب مسأله به صورت تحلیلی چنین است:

$$x = \frac{s_3}{s_1 s_2} \times \frac{s_1 b_2 t_2 (t_3 - t_1) - s_2 b_1 t_1 (t_3 - t_2)}{t_3 (t_2 - t_1)}$$

که در آن، مقدار s بر حسب آکر؛ عدد b تعداد گاوها و زمان t تعداد

۲۲۸. ۱. فاصله AB را مساوی s ، سرعت اختصاصی هریک از قایقها را مساوی v و سرعت جریان آب را مساوی a می‌گیریم. در این صورت (برای وقتی که جهت حرکت آب از A به B باشد) داریم:

$$\frac{s}{v+a} - \frac{s}{v+ax} = \frac{s}{v-a-x} - \frac{s}{v-a}$$

که از آنجا بدست می‌آید:

$$\frac{x}{a} = -2$$

و یا (وقتی که جهت حرکت آب از B به A باشد):

$$\frac{s}{v+a-x} - \frac{s}{v+a} = \frac{s}{v-a} - \frac{s}{v-a+x}$$

و از آنجا:

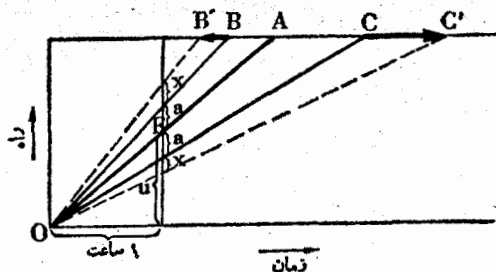
$$\frac{x}{a} = 2$$

بنابراین جواب چنین است: قایقی که در خلاف جهت جریان آب حرکت می‌کند، باید سرعت خود را به اندازه $x = 2a$ اضافه کند و قایقی که در جهت جریان آب حرکت می‌کند، باید به همین اندازه از سرعت خود کم کند.

۲. برای حل مسأله، مقادیر s (فاصله دو نقطه A و B) و v (سرعت اختصاصی هریک از قایقها) را وارد کردیم، که در جواب هیچگونه دخالتی نداشتند. چرا؟ اگر عدم دخالت s در جواب، کم و بیش قابل فهم است، ناپدید شدن v ، مبهم و ناشناخته باقی می‌ماند. معنای فیزیکی جواب چیست؟

در دستگاه محورهای مختصات «زمان - راه»، OA ، نمایش حرکت قایق را، بدون در نظر گرفتن جریان آب، رسم می‌کنیم (خط کلفت‌تر در شکل ۱۱۷- a). در دو طرف نقطه F ، روی خط قائم، پاره خط-

(۱) برای حل جبری این مسأله، به کتاب «سرگرمیهای جبر» تألیف «یا.ای. پرلمان» - ترجمه فارسی، چاپ امیرکبیر، صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶ مراجعه کنید.



شکل ۱۱۷ - a

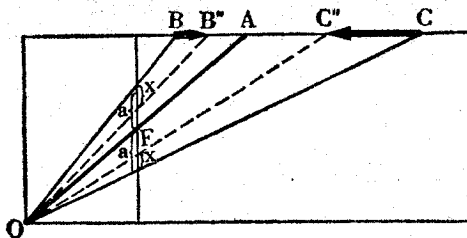
هایی مساوی a از دو طرف جدا می‌کنیم و نمایش تغییرات OB - حرکت قایق در جهت جریان آب، و OC - حرکت قایق در خلاف جریان حرکت آب را رسم می‌کنیم (OB و OC با خطهای کامل نازک رسم شده‌اند). همه مقادیر را با پاره‌خطهای دلخواهی انتخاب کرده‌ایم، از بحث بعد روشن خواهد شد که این مطلب اثری در نتیجه کار ندارد.

سرعت قایقی را که در جهت جریان آب حرکت می‌کند، به اندازه x اضافه می‌کنیم، نمایش تغییرات OB' بدست می‌آید. سرعت قایقی را که در خلاف جهت جریان آب حرکت می‌کند، به اندازه x کم می‌کنیم، نمایش تغییرات OC' بدست می‌آید (OB' و OC' با خطچین نشان داده شده است).

از فرض مسأله معلوم می‌شود که کاهش مدت حرکت قایق اول (که با پاره‌خط BB' نشان داده شده است) باید مساوی افزایش مدت حرکت قایق دوم (پاره‌خط CC') باشد. ولی از شکل ۱۱۷- a پیدا است که v ، a و x هرچه باشند، همیشه $BB' \neq CC'$ ، تغییر سرعتها به نحوی که انجام شد، نمی‌تواند مسأله را به جواب برساند.

جهت سرعت مجهول x را عوض می‌کنیم (شکل ۱۱۷- b):

سرعت قایقی را که در خلاف جهت جریان آب حرکت می‌کند، به اندازه x اضافه می‌کنیم، نمایش تغییرات OC'' بدست می‌آید. سرعت قایقی را که در جهت جریان آب حرکت می‌کند، به اندازه x کم می‌کنیم، نمایش تغییرات OB'' بدست می‌آید (OB'' و OC'' با خط



شکل ۱۱۷ - b

چین نشان داده شده‌اند).

از شکل به خوبی معلوم می‌شود که BB'' تنها وقتی مساوی CC'' است که نقطه B'' بر نقطه C ، و نقطه C'' بر نقطه B منطبق باشد. در چنین حالتی، قایقها (با تغییر نمایش تغییرات آنها به وضع جدید)، با شرطهای مسأله می‌سازند: قایقی که در خلاف جریان آب حرکت می‌کند همانقدر به سرعت خود اضافه می‌کند که قایق دیگر (آنکه در جهت جریان آب حرکت می‌کند)، از سرعت خود کم می‌کند (به اندازه $x = 2a$)، در این صورت، مدت حرکت قایق اول همانقدر کم می‌شود که به مدت حرکت قایق دوم اضافه می‌شود (این مدت روی شکل با پاره خط BC نشان داده شده‌است).

شکل به خوبی نشان می‌دهد که چرا مقدار سرعت اختصاصی، دخالتی در جواب ندارد؛ استدلال ما، هیچگونه ارتباطی به مقدار v ندارد و ثابت می‌کند که جواب مسأله، منحصر به فرد است.

مسأله را با «استدلال منطقی خالص» هم می‌توان حل کرد. بنابراین فرض مسأله، به سرعت یکی از قایقها، همانقدر اضافه می‌شود، که از سرعت قایق دیگر کم می‌شود؛ در عمل می‌توان این تغییر سرعتها را به حساب تغییر سرعت جریان آب گذاشت. بنابراین مسأله را می‌توان به این صورت تنظیم کرد: «سرعت جریان آب را چگونه باید تغییر داد، تا کاهش زمان حرکت یکی از قایقها، درست مساوی افزایش زمان حرکت قایق دیگر باشد.» جواب روشن است: اگر جهت جریان آب را عوض کنیم، قایق اول همانقدر در راه خواهد بود که قایق دوم

در حالت اول در راه می بود ، و برعکس قایق دوم همانقدر صرف حرکت خواهد کرد که قایق اول در حالت قبل صرف می کرد ، بنابراین آنقدر که به زمان حرکت قایق اول اضافه می شود ، همانقدر هم از زمان حرکت قایق دوم کم می شود . ولی تغییر جهت آب (با ثابت بودن سرعت اختصاصی قایقها) ، معادل با آن است که سرعت قایقی را که ابتدا در خلاف جهت جریان آب حرکت می کرد ، به اندازه دو برابر سرعت جریان آب ، یعنی $x = 2a$ ، اضافه کنیم .

حالا دیگر کاملاً روشن شده است که چرا سرعت اختصاصی قایقها ، و فاصله s ، در جواب مسئله دخالتی ندارند .

۲۲۹. ۱. سن پدر را u ، پسر بزرگتر را x ، پسر دوم را y و پسر کوچکتر را z می گیریم . با توجه به فرضهای مسئله ، به سادگی ، این معادله ها بدست می آید :

$$u = x + y + z + 5 , \quad u + 10 = 2(x + 10) ,$$

$$u + 20 = 2(y + 20) , \quad u + 30 = 2(z + 30)$$

از سه معادله آخر ، x ، y و z را بر حسب u ، محاسبه می کنیم :

$$x = \frac{u - 10}{2} , \quad y = \frac{u - 20}{2} , \quad z = \frac{u - 30}{2}$$

این مقادیر را در معادله اول قرار می دهیم :

$$u = \frac{3u - 60}{2} + 5 \Rightarrow u = 50$$

که از آنجا به سادگی x ، y و z بدست می آید :

$$x = 20 , \quad y = 15 , \quad z = 10$$

۲. بعد از ۱۰ سال ، سن پسر بزرگتر مساوی نصف سن پدر می شود . وقتی که ۱۰ - ۲۰ ، یعنی ۱۰ سال دیگر بگذرد ، پسر بزرگتر ، ۱۰ سال بزرگ می شود ، ولی نصف سن پدر به اندازه $10 \div 2 = 5$ یعنی ۵ سال زیاد می شود . بنابراین در آن موقع ، تعداد سالهای سن پسر

بزرگتر به اندازه ۵ - ۱۰، یعنی ۵ سال بیشتر از نصف تعداد سالهای سن پدر است؛ ولی در این زمان، سن پسر دوم، مساوی نصف سن پدر است. در نتیجه معلوم می شود که پسر بزرگتر، ۵ سال از پسر دوم بزرگتر است. به همین ترتیب می توان روشن کرد که پسر دوم، ۵ سال از پسر کوچکتر، بزرگتر است.

اگر سن پسر کوچکتر را z و سن پدر را u فرض کنیم، داریم :

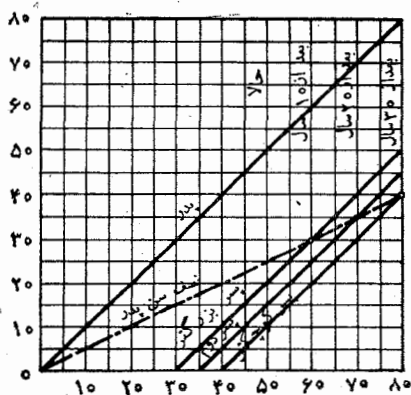
$$z + (z + 5) + (z + 10) + 5 = u \Rightarrow 3z + 20 = u,$$

$$(z + 5 + 5 + 10) \times 2 = u + 10 \Rightarrow 2z + 30 = u,$$

که از آنجا خواهیم داشت :

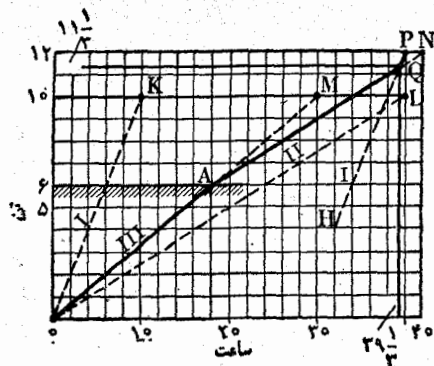
$$z = 10, y = 15, x = 20, u = 50$$

این نتیجه ها را می توان به روشنی روی شکل زیر مشاهده کرد :



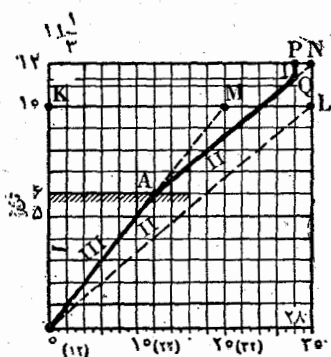
شکل ۱۱۸

۲۳۰. قبل از همه متذکر می شویم که عدد مطلق قیمت محصول، هیچگونه اهمیتی برای جستجوی جواب ندارد؛ تنها این مطلب مهم است ارزانترین قیمت محصول در دهستان III و گرانترین آن در دهستان I است. مسأله را به کمک نمایش تغییرات حل می کنیم، خط شکسته ای را می سازیم که به وسیله آن سیر حرکت زمان را برای کار اتومبیلی که محصول را، از دهستانهای اول، دوم و سوم حمل می کند، نشان دهد (شکل ۱۱۹-ا).



شکل ۱۱۹-ا

این خط شکسته از نقطه $O(0, 0)$ شروع می‌شود. رساندن محصول از دهستان I با نیم خط I نشان داده شده است، که از نقطه $K(10, 10)$ می‌گذرد: در ۱۰ ساعت ۱۰ تن؛ به همین ترتیب، برای دهستان II، که از نقطه $L(40, 10)$ می‌گذرد؛ و برای دهستان III، نیم خط III، که از نقطه $M(30, 6)$ می‌گذرد. خط شکسته مورد نظر، از سه پاره خط تشکیل شده است، به نحوی که طول تصویر آن روی محور عرض، متناظر با وزن کل محصول (۱۲ تن) باشد؛ و طول تصویر آن بر محور طول، از زمان کار اتومبیل (۴۰ ساعت) تجاوز نکند.



شکل ۱۱۹-ب

چون محصول مورد نظر، در دهستان III، از جاهای دیگر، ارزانتر است، ابتدا خرید را از آنجا می‌کنیم؛ ولی مقدار محصول در دهستان III، محدود به ۶ تن است؛ بنابراین اولین پاره خط از خط شکسته مطلوب عبارت

است از OA . بعد از دهستان III ، قیمت محصول در دهستان II ارزانتر است؛ از نقطه A ، پاره خط AN را موازی OL رسم می کنیم، ولی نقطه N خارج مرز زمانی ما قرار دارد (۴۲ ساعت به جای ۴۰ ساعت) به همین مناسبت، از نقطه P نیم خط PH را موازی OK رسم می کنیم تا خط AN را در نقطه Q قطع کند. خط شکسته مطلوب $OAPQ$ خواهد بود، جواب را می خوانیم:

$$x_1 = \frac{2}{3} \text{ (تن)} , x_2 = 5\frac{1}{3} \text{ (تن)} , x_3 = 6 \text{ (تن)}$$

حل مسأله را می توان به این ترتیب ساده تر کرد که عددهای مربوط به صرف وقت برای حمل و نقل را (۱ ، ۴ و ۳)، یک واحد کم کنیم، یعنی آنها را مساوی ۰ ، ۳ و ۲ بگیریم، متناظر با آن مرز زمانی را هم ۱۲ ساعت پایین بیاوریم. نمایش تغییرات مربوط به این وضع را در شکل $b-۱۱۹$ داده ایم.

۲۳۱. $AM = x$ و $AP = y$ می گیریم ($x > y$)، ضمناً x و y را

برحسب کیلومتر به حساب می آوریم. مسافرهایی مسن تر در راه از

A به B ، به اندازه $\left(\frac{x}{۳۶} + \frac{۳۹/۶ - x}{۴}\right)$ ساعت و دو مسافر

جوانتر $\left(\frac{y}{۶} + \frac{۳۹/۶ - y}{۳۶}\right)$ ساعت وقت صرف کرده اند. بالاخره

وقتی که اتومبیل برای رسیدن از A به B صرف کرده است، چنین است:

$$\frac{x + (x - y) + (۳۹/۶ - y)}{۳۶} \text{ (ساعت)}$$

چون این سه مقدار باهم برابرند، بدست می آید:

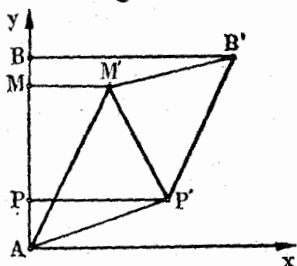
$$\frac{x}{۳۶} + \frac{۳۹/۶ - x}{۴} = \frac{y}{۶} + \frac{۳۹/۶ - y}{۳۶} = \frac{۲x - ۲y + ۳۹/۶}{۳۶}$$

از این دستگاه، جواب زیر بدست می آید:

$$x = ۳۳/۶ \text{ (کیلومتر)} ; y = ۹/۶ \text{ (کیلومتر)}$$

۲. حال این مسأله را به کمک ترسیم حل می کنیم. طبق فرض، دو

مسافر جوان و اتومبیل در يك لحظه از نقطه A حرکت کرده اند ؛ این حقیقت را به وسیله دو نیم خط AM' و AP' نشان داده ایم که مبدأ آنها برهم منطبق است ؛ چون اتومبیل سریع تر از پیاده ها



شکل ۱۲۵

می رود ، زاویه ای که نیم خط AM' با جهت مثبت محور Ax می سازد ، بزرگتر از زاویه ای است که نیم خط AP' با این محور به وجود می آورد. از نقطه M ، اتومبیل (به طرف عقب) و دومسافر مسن تر (به

طرف جلو) با هم حرکت می کنند: نمایش حرکت آنها به ترتیب عبارت

است از پارمخهای $M'P'$ ($M'P'P = M'Ax$) و $M'B'$ (زاویه بین $M'B'$ با محور Ax ، کوچکتر است از زاویه بین AP' و محور Ax).

در P ، اتومبیل و جوانها به هم می رسند : نقطه P' .

در B ، اتومبیل و مسن ترها به هم می رسند : $P'B'$ را موازی AM' رسم می کنیم تا نیم خطی را که از M' شروع شده است ، در B' قطع کند .

نقطه های P' ، M' و B' را روی محور قائم تصویر می کنیم تا نقطه های P ، M و B بدست آید .

با توجه به شرطهای مسأله داریم :

$$۱) \quad \frac{AM + MP}{AP} = ۳۶ \div ۶ \Rightarrow \frac{AP + ۲MP}{AP} = ۶$$

و از آنجا

$$۱ + \frac{۲MP}{AP} = ۶ \Rightarrow \frac{۲MP}{AP} = ۵ \Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{۲}{۵}$$

$$۲) \quad \frac{MP + PB}{MB} = ۳۶ \div ۴ \Rightarrow \frac{MB + ۲MP}{MB} = ۹$$

و از آنجا:

$$1 + \frac{2MP}{MB} = 9 \Rightarrow \frac{2MP}{MB} = 8 \Rightarrow \frac{MP}{MB} = \frac{4}{1}$$

بنابراین *

$$AP \div PM \div MB = 8 \div 20 \div 5$$

از آنجا:

$$AP = \frac{8}{8 + 20 + 5} \times 39.6 = \frac{8}{33} \times 39.6 = 9.6 \text{ (کیلومتر)}$$

$$PM = \frac{20}{33} \times 39.6 = 24 \text{ (کیلومتر)}$$

در این راه حل دیده می شود که جواب ، به مقدار مطلق سرعتها ارتباطی ندارد و تنها به نسبت سرعت اتومبیل به سرعت پیاده ها مربوط می شود.

۱۰۲۳۲. حل جبری مسأله مشکل نیست. اگر تعداد خروسها را x ، تعداد مرغها را y و تعداد جوجه ها را z فرض کنیم، باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \end{cases} \quad (1)$$

اگر بین این دو معادله، z را حذف کنیم، به معادله دومی زلی می رسیم :

$$7x + 4y = 100$$

که می توان آنرا به این صورت نوشت :

$$y = 25 - 2x + \frac{x}{4}$$

از این معادله معلوم می شود که x بر ۴ قابل قسمت است. اگر x را به ترتیب مساوی ۴، ۸ و ۱۲ بگیریم برای y ، عددهای ۱۸، ۱۱ و ۴ و برای z ، عددهای ۷۸، ۸۱ و ۸۴ بدست می آید. اگر x را بزرگتر از ۱۲، و مثلاً مساوی ۱۶ بگیریم، برای y عددی

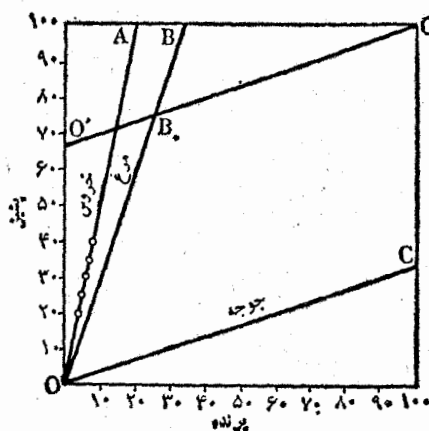
این نسبت های مساوی را با ترسیم خالص هم می شد پیدا کرد.

منفی بدست می آید که قابل قبول نیست ، بنابراین دستگاه (۱) تنها سه جواب دارد :

$x_1 = 4$	$x_2 = 8$	$x_3 = 12$
$y_1 = 18$	$y_2 = 11$	$y_3 = 4$
$z_1 = 78$	$z_2 = 81$	$z_3 = 84$

که در هر حال ، هم تعداد کل پرنده ها و هم جمع قیمت آنها مساوی ۱۰۰ می شود .

۲. حالا به حل ترسیمی مسأله می پردازیم (شکل ۱۲۱-ا). در این ترسیم ، افزایش قیمت خرید را نسبت به اضافه شدن تعداد پرنده های



شکل ۱۲۱-ا

مورد خریداری، بررسی می کنیم. به این ترتیب، باید سه خط شکسته ساخت ، که هر کدام از آنها با شرط های زیر بسازند : (۱) شروع خط شکسته در مبدا مختصات و انتهای آن، در نقطه متناظر با ۱۰۰ پرنده و ۱۰۰ پیشیز قرار گیرد؛ (۲) خط شکسته از سه پاره خط تشکیل

شده باشد، به نحوی که تصویر افقی هر پاره خط آن ، متناظر با تعداد یکی از پرنده های خریداری شده و تصویر قائم آن ، متناظر قیمت این پرنده ها باشد (به ترتیب برای جوجه ها ، مرغ ها و خروس ها) ؛ (۳) طول هریک از رأس های خط شکسته، عددی صحیح باشد .

از نقطه (۰ ، ۰) O ، نیم خط AO را طوری رسم می کنیم که ضریب زاویه آن مساوی ۱ ÷ ۵ باشد (پنج پیشیز برای یک خروس). همچنین نیم خط OB را با ضریب زاویه مساوی ۱ ÷ ۳ (سه پیشیز برای یک

مرغ) و نیم خط OC را با ضریب زاویه مساوی $۳ \div ۱$ (یک پیشیز برای سه جوجه) ، رسم می کنیم .
سه پاره خط هر یک از خطهای شکسته باید موازی این نیم خطها باشند .

چون تعداد هر یک از پرنده ها باید عددی صحیح باشد، در حقیقت تنها با نقطه هایی که واقع بر این خطهای شکسته اند، سروکار داریم، نه تمام خطهای شکسته به صورت پیوسته : اینها نقطه هایی هستند که طول آنها عددهایی صحیح باشند . روی نیم خط OA ، چند تا از این نقطه ها را مشخص کرده ایم .

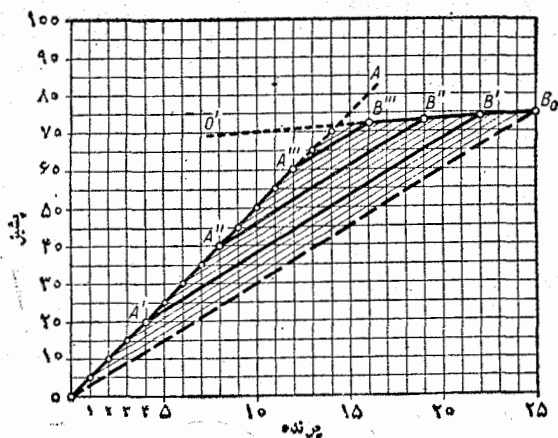
از نقطه $(۱۰۰ ، ۱۰۰)$ ، خط $O'C$ را موازی OC رسم می کنیم . این خط ، نیم خط OB را در نقطه $B_۰$ قطع می کند ؛ طول $B_۰$ مساوی ۲۵ ، و عددی صحیح است . خط شکسته $OB_۰C_۰$ در شرطهای زیر صدق می کند :

شروع آن ، نقطه $O(۰ ، ۰)$ و انتهای آن $(۱۰۰ ، ۱۰۰)$ است ؛ طول رأسهای آن $(۰ ، ۲۵)$ و $(۱۰۰ ، ۱۰۰)$ ، عددهایی صحیح اند ؛ پاره خط اول آن موازی OB و پاره خط دوم آن موازی OC است .

بنابراین ، خط شکسته $OB_۰C_۰$ با همه شرطها ، بجز شرط اول سازگار است : در این خط شکسته ، پاره خط سوم ، که متناظر با تعداد خروسها است ، وجود ندارد (خط شکسته $OB_۰C_۰$ نشان می دهد که ۲۵ مرغ و ۷۵ جوجه خریده شده است ؛ مجموع پرنده ها $۷۵ + ۲۵$ ، یعنی

۱۰۰ ، و مجموع قیمت آنها $\frac{1}{3} \times ۷۵ + ۲۵ \times ۳$ یعنی ۱۰۰ پیشیز

می شود) . برای اینکه خروس هم جزو خرید باشد ، باید پاره خط مربوط به «مرغها» را به موازات خود طوری جابجا کرد که نیم خطهای OA و $O'C$ را در نقطه هایی به طولهای صحیح ، قطع کند . برای اینکه کار ترسیم ساده تر شود ، مقیاس افقی را در قسمتی از جدول بزرگ می کنیم (شکل ۱۲۱- b) .

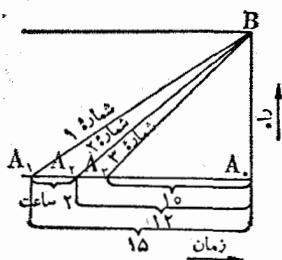


شکل ۱۲۱-ب

همانطور که از روی شکل دیده می شود ، شرطهای مسأله ، تنها در سه خط شکسته صدق می کند .

خط شکسته	خروس	مرغ	جوجه	مجموع پرنده ها	قیمت آنها
$OA'B'C$	۴	۱۸	۷۸	۱۰۰	۱۰۰
$OA''B''C$	۸	۱۱	۸۱	۱۰۰	۱۰۰
$OA'''B'''C$	۱۲	۴	۸۴	۱۰۰	۱۰۰

۲۳۳.۰) نمایش تغییرات حرکت سه جسم را رسم می کنیم . چون جسمها ،



شکل ۱۲۲

از نقطه شروع حرکت (که آنرا A می نامیم) ، در زمانهای مختلف ، حرکت کرده اند و سپس در يك نقطه به هم رسیده اند ، نمایش تغییرات سه حرکت ، در نقطه B به هم می رسند . چون طبق فرض ، سرعت جسمها به نسبت $۶ \div ۵ \div ۴$ است و زمان

حرکت متناسب با نسبت عکس سرعتها است (چون طول راه برای هر سه جسم یکی است) ، بنابراین :

$$A_1 A_0 \div A_2 A_0 \div A_3 A_0 = \frac{1}{4} \div \frac{1}{5} \div \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{15}{60} \div \frac{12}{60} \div \frac{10}{60} = 15 \div 12 \div 10$$

از طرف دیگر $A_1 A_2 = 2$ ساعت است ، در نتیجه

$$A_2 A_3 = \frac{12 - 10}{15 - 12} \times A_1 A_2 = \frac{2}{3} \times 2 = 1 \frac{1}{3} \text{ (ساعت)}$$

متذکر می شویم که برای حل این مسأله ، نیازی به مقادیر مطلق سرعتها نیست و تنها کافی است که نسبت این سرعتها برای ما معلوم باشد (جواب فرق نمی کند ، اگر سرعت جسمها به ترتیب مساوی ۴ ، ۵ و ۶ سانتیمتر در ساعت باشد یا ۴ ، ۵ و ۶ کیلومتر در ثانیه و غیره) .

(b) به کمک رابطه مربوط به حرکت متشابه‌التغییر می توان دستگاهی شامل سه معادله و سه مجهول تشکیل داد : (۱) سرعت اولیه جسم دوم ، (۲) شتاب جسم اول و (۳) فاصله زمانی از شروع حرکت تا لحظه ای که سرعت دو جسم مساوی می شود ؛ با پیدا کردن این مجهولها ، می توان محاسبه را ادامه داد و لحظه مورد نظر مسأله را بدست آورد . ولی محاسبه جواب ، با این روش به اندازه کافی مفصل می شود. اگر به آنچه که در زیر می آوریم توجه کنیم ، ساده تر می توان به جواب رسید .

طبق فرض مسأله ، در لحظه ای که سرعتهای دو جسم مساوی می شود ، فاصله بین آنها ۳۷۹ متر است ، ما می خواهیم بدانیم که چه موقع ، جسم دوم به اندازه ۱۱۳۷ متر از جسم اول جلو می افتد . ولی

$$1137 : 379 = 3$$

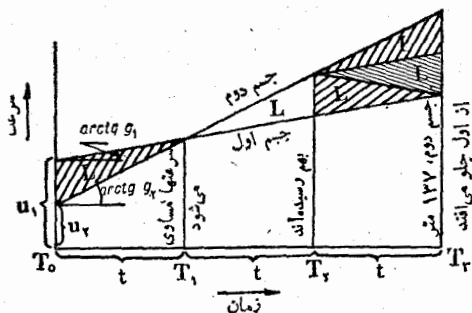
بنابراین مسأله را می توان به این صورت تنظیم کرد :

«دو جسم از نقطه A در يك جهت و در يك زمان شروع به حرکت کردند؛ هر دو ، حرکت متشابه‌التغییر دارند ؛ سرعت اولی بیشتر از سرعت دومی است . بعد از ۱ ساعت و ۳۷ دقیقه و ۳۹ ثانیه ، جسم

دوم به جسم اول می‌رسد...».

به این ترتیب طرح کلی حرکت چنین است: دو جسم همزمان از يك نقطه شروع به حرکت می‌کنند؛ چون سرعت اولی بیش از سرعت دومی است، فاصله بین آنها شروع به زیاد شدن می‌کند؛ ولی از طرف دیگر، بعد از مدتی، جسم دوم به جسم اول می‌رسد؛ این وضع تنها در صورتی پیش می‌آید که شتاب آن بیشتر از شتاب جسم اول باشد؛ بنابراین قبل از برخورد، لحظه‌ای وجود دارد که در آن سرعت دو جسم برابر می‌شود.

همه اینها را می‌توان روی شکل، ساده‌تر دید، نمایش تغییرات را در دستگاه مختصات «زمان - سرعت» رسم می‌کنیم. چون $s = v.t$ ، بنابراین مقدار راهی که به وسیله جسم طی شده است، به صورت مساحت دوزنقه قائم‌الزاویه، و فاصله بین دو جسم در لحظه T ، به صورت اختلاف مساحت‌های دو دوزنقه، نشان داده می‌شود.



شکل ۱۲۳

روی محور سرعت، دوپاره خط دلخواه v_1 و v_2 را جدا می‌کنیم ($v_1 > v_2$). از انتهای این پاره‌خطها، دو خط با ضریب زاویه‌های g_1 و g_2 رسم می‌کنیم ($g_1 < g_2$). طول نقطه برخورد این دو خط برابر است با t ، فاصله زمانی از شروع حرکت تا لحظه‌ای که سرعت‌های دو جسم مساوی می‌شود. تفاضل مساحت دوزنقه‌ها ($L = ۳۷۹$ مترمربع) عبارت است از فاصله بین دو جسم، در لحظه‌ای

که مسرعت‌های مساوی دارند.

سپس، برای اینکه دو جسم به هم برسند، باید مساحت دو دوزنقه مربوطه، یعنی فاصله‌ها، برابر شود. ولی مساحت دو دوزنقه قائم‌الزاویه وقتی مساوی می‌شود، که ارتفاع مشترك و خط‌های میانه آنها، مساوی باشد. از آنجا نتیجه می‌شود: $T_1 \cdot T_2 = 2 T_0 \cdot T_3$.

طبق صورت مسأله، باید لحظه‌ای را پیدا کرد که در آن، جسم دوم به اندازه ۱۱۳۷ متر از جسم اول جلو بیفتد. ولی:

$$1137 = 3 \times 379 = 3L$$

بنابراین باید نقطه‌ای مانند T_3 را پیدا کرد، به نحوی که اختلاف بین مساحت‌های دو دوزنقه قائم‌الزاویه با ضلع مشترك $T_2 T_3$ مساوی $3L$ بشود. ولی برای این منظور باید $T_2 T_3 = t$ باشد. در این وضع

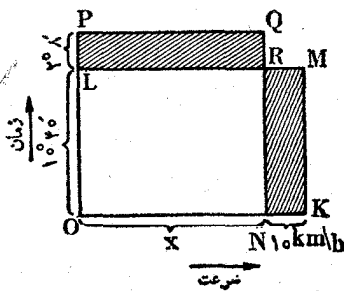
$$T_0 \cdot T_3 = 3t = 3 \times \frac{37 \text{ ساعت } 39 \text{ دقیقه و } 39 \text{ ثانیه}}{2} =$$

$$= 2 \text{ ساعت } 11 \text{ دقیقه و } 28/5 \text{ ثانیه}$$

و به این ترتیب جواب مسأله بدست می‌آید.

سرعت اولیه جسم اول و شتاب جسم دوم، که در صورت مسأله آمده است، می‌تواند حذف شود، زیرا جواب مسأله هیچگونه ارتباطی به آنها ندارد.

۲۳۴. محور افقی را، محور سرعت و محور قائم را، محور زمان می‌گیریم (شکل ۱۲۴). چون فاصله‌ای را که قطاری می‌کند، برابر است با حاصلضرب سرعت در زمان، بنابراین مساحت مستطیلی که ضلع‌های آن نماینده سرعت و زمان است، فاصله‌ای را که قطار طی می‌کند، نشان می‌دهد. فرض



شکل ۱۲۴

کنیم پاره خط OK سرعت قطار

و پاره خط OL زمان حرکت

باشد (۱۰ ساعت و ۵ دقیقه)؛

در این حالت، مساحت مستطیل

$OKML$ ، فاصله بین دوشهر

A و B را نشان می‌دهد.

اگر سرعت قطار را ۱۰ کیلومتر

در ساعت کم کنیم (پاره خط

(KN)، زمان حرکت ۲ ساعت و ۸ دقیقه (پاره‌خط LP) زیاد می‌شود. در این وضع فاصله AB، با مساحت مستطیل ONQP مشخص می‌شود. چون فاصله دو شهر، در این دو حالت، یکی است، باید مساحت‌های دو مستطیل OKML و ONQP برابر باشد؛ و چون مستطیل ONRL قسمت مشترك آنها است، بنابراین باید مساحت دو مستطیل NKMR و LRQP برابر باشد. اگر سرعت کم شده قطار (پاره‌خط ON) را x بگیریم، بدست می‌آید:

$$(10 \text{ کیلومتر در ساعت}) \times (10 \text{ ساعت و } 40 \text{ دقیقه}) = (x \text{ کیلومتر در ساعت}) \times (2 \text{ ساعت و } 8 \text{ دقیقه})$$

از آنجا:

$$x = \frac{10 \text{ ساعت و } 40 \text{ دقیقه}}{2 \text{ ساعت و } 8 \text{ دقیقه}} \times 10 =$$

$$= \frac{620}{128} \times 10 = 50 \text{ (کیلومتر در ساعت)}$$

و سرعت قطار: $60 = 10 + 50$ (کیلومتر در ساعت).

و فاصله بین دو شهر: $60 \times 10 \frac{40}{60} = 640$ (کیلومتر)

۲۳۵. a) طبق فرض، يك نوع عمل را، سه بار تکرار می‌کنیم: يك چهارم

مایع محتوی يك ظرف را به ظرف دوم و يك چهارم دیگر آنرا به ظرف سوم می‌ریزیم. هر بار که این عمل را انجام می‌دهیم، مقدار کلی مایعی که در سه ظرف وجود دارد، تغییر نمی‌کند. این مقدار

ثابت مایع را به صورت محیط يك دایره

(۳۶۰ درجه)، نشان می‌دهیم؛ مقدار

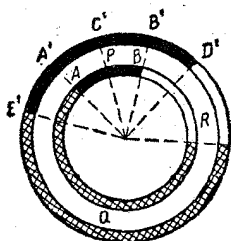
مایعی که در هر لحظه، در این یا آن ظرف وجود

دارد، به وسیله قوس متناظر با آن، مشخص

می‌شود (شکل ۱۲۵ - a). ریختن قسمتی

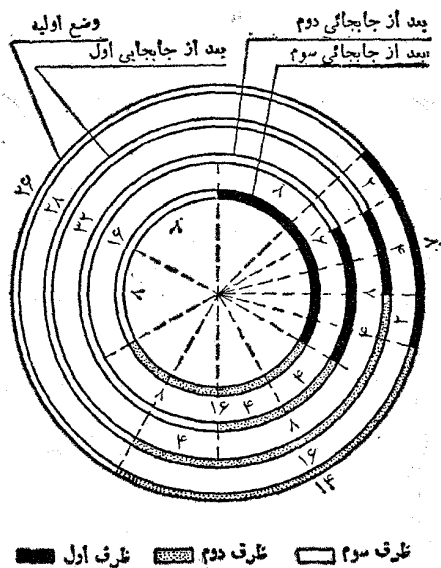
از مایع ظرف P به ظرف Q (یا به ظرف R)،

به معنای جابجا شدن قوسها است؛ ضمناً



شکل ۱۲۵ - a

نقطه‌ای که محل برخورد قوسهای متناظر با ظرفهای Q و R است، تغییر نمی‌کند. فرض کنید، بعد از ریختن يك چهارم مایع ظرف P در ظرف Q و يك چهارم دیگر آن در ظرف R ، مقدار مایعی که در ظرف P باقی می‌ماند با قوس AB نشان داده شود. نقطه $E' = B'D' = \frac{1}{4}A'B'$ را جدا می‌کنیم، نقطه E' (و همچنین نقطه D') را بدست می‌آوریم که مرز بین ظرفهای P و Q (و یا بین P و R)، قبل از جابجا کردن مایع است.



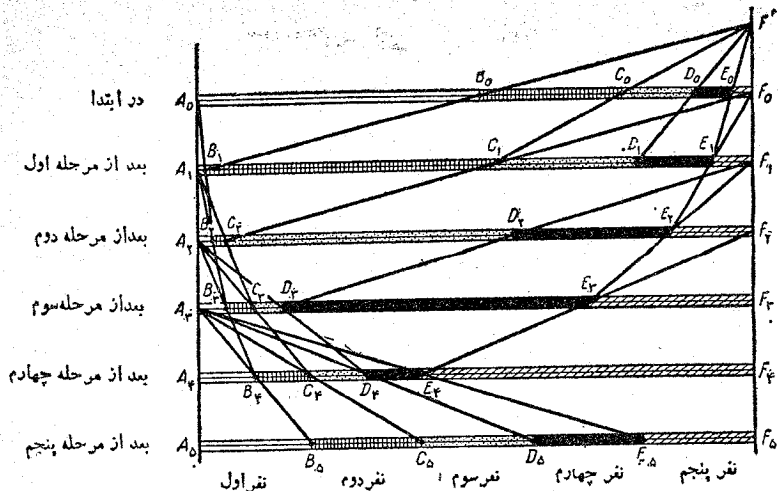
شکل ۱۲۵-b

در شکل ۱۲۵-b، دایره داخلی، وضع را در پایان کار نشان می‌دهد: در هر يك از سه ظرف، ۱۶ لیتر مایع وجود دارد. وضع قبل از آن (با توجه به آنچه که روی شکل ۱۲۵-a، در بالا توضیح دادیم)، روی دایره بعدی نشان داده شده است. به همین ترتیب، دو دایره بعدی را پیدا کرده‌ایم، به نحوی که وضع اولیه، روی دایره خارجی مشخص شده است. با توجه به تقسیم‌بندی که روی دایره‌ها شده‌است،

می توان در هر مرحله ، مقدار مایع داخل هر ظرف را پیدا کرد.
جواب : در ابتدا ، ظرف اول ۸ لیتر ، ظرف دوم ۱۴ لیتر و ظرف سوم ۲۶ لیتر مایع داشته است .

(b) حل حسابی مسأله . در پایان کار ، هریک از پنج نفر به اندازه $\frac{1}{5}$ مبلغ کل داشته اند ؛ بنابراین قبل از پنجمین عمل ، چهار نفر هر کدام $\frac{1}{10}$ و نفر پنجم $\frac{6}{10}$ مبلغ کل را در اختیار داشتند ؛ قبل از مرحله چهارم ، سه نفر اول هر کدام $\frac{1}{20}$ ، چهارمی $\frac{11}{20}$ و پنجمی $\frac{6}{20}$ ؛ قبل از مرحله سوم ، دو نفر اول هر کدام $\frac{1}{40}$ ، سومی $\frac{21}{40}$ ، چهارمی $\frac{11}{40}$ و پنجمی $\frac{6}{40}$ ؛ قبل از مرحله دوم ، اولی $\frac{1}{80}$ ، پنجمی $\frac{6}{80}$ ؛ قبل از مرحله اول (یعنی در تقسیم اولیه) ، اولی $\frac{81}{160}$ ، دومی $\frac{41}{160}$ ، سومی $\frac{21}{160}$ ، چهارمی $\frac{11}{160}$ و پنجمی $\frac{6}{160}$ مبلغ کل را در اختیار داشته اند . ولی می دانیم که در تقسیم اولیه ، به اولی ۸۱ سکه رسیده بود ، بنابراین روی هم ۱۶۰ سکه بوده است .

حل ترسیمی مسأله . شش پاره خط موازی A_5F_5 ، A_4F_4 ، A_3F_3 ، A_2F_2 ، A_1F_1 ، A_0F_0 را به فاصله مساوی از یکدیگر ، رسم می کنیم . پاره خط پایینی A_5F_5 را به وسیله نقطه های B_5 ، C_5 ، D_5 و E_5 ، به پنج قسمت مساوی تقسیم می کنیم : بعد از مرحله پنجم (یعنی وقتی که برای پنجمین بار ، یک نفر موجودی دیگران را دو برابر کرد) ، سهم پنج نفر با هم مساوی شد . نقطه A_3 را به نقطه های B_5 ، C_5 ، D_5 و E_5 وصل می کنیم . در این صورت روی پاره خط A_4F_4 پاره خط های A_4B_4 ، A_4C_4 ، A_4D_4 و A_4E_4 بدست می آید که به ترتیب متناظر با تعداد سکه های چهار نفر اول ، قبل از مرحله پنجم



شکل ۱۲۶

است. حالا نقطه A_4 را به نقطه‌های B_4 ، C_4 و D_4 ، و نقطه F_4 را به نقطه E_4 وصل می‌کنیم، نقطه‌های B_4 ، C_4 و D_4 ، که به این ترتیب بدست می‌آید، وضع تقسیم سکه‌ها را قبل از مرحله چهارم نشان می‌دهند. ساختمان بعدی روی شکل ۱۲۶ کاملاً روشن است. پاره خط A_1B_1 از تقسیم A_5B_5 به چهار قسمت مساوی بدست می‌آید که خود A_5B_5 هم يك پنجم تمام مبلغ است؛ بنابراین:

$$A_1B_1 = \frac{AF}{5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{AF}{80}$$

به این ترتیب، راهزن اول بعد از آنکه سکه‌های چهار نفر دیگر را دو برابر کند، $\frac{1}{80}$ تمام مبلغ برایش باقی می‌ماند، در این وضع چهار نفر دیگر $\frac{79}{80}$ مبلغ را در اختیار دارند، یعنی قبل از آنکه سکه-

هایشان دو برابر شود $\frac{79}{160}$ مبلغ را داشته‌اند، در نتیجه اولی

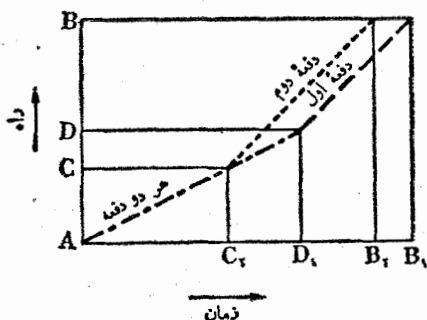
$1 - \frac{79}{160}$ ، یعنی $\frac{81}{160}$ سکه‌ها را به خود اختصاص داده بود؛

و چون طبق فرض ، اولی ۸۱ سکه را برداشته بود ، بنابراین تمام سکه‌ها ۱۶۰ عدد بوده است. وقتی که $AF = ۱۶۰$ باشد :

$$A_{\Delta}B_{\Delta} = B_{\Delta}C_{\Delta} = C_{\Delta}D_{\Delta} = D_{\Delta}E_{\Delta} = E_{\Delta}F_{\Delta} = 32$$

برای اینکه بدانیم هر کدام در ابتدا چند سکه داشته اند ، کافی است روی شکل واز خط پایین شروع کنیم و همهٔ عددها را بدست آوریم.

۱۰۲۳۶) مسیر حرکت را در دستگاه «زمان-راه» رسم می کنیم (شکل ۱۲۷).



دفعہ اول : نصف راہ

(AD) با سرعت اولیه

طی می شود و نصف

دیگر راه (DB) با

سرعت دو برابر، یعنی

$$D_1 B_1 = \frac{1}{2} AD_1$$

دفعہ دوم: نصف زمان

با سرعت اولیه طی

می‌شود ، نصف دیگر با سرعت دو برابر ، یعنی $CB = 2AC =$ و

$$\cdot AC_Y = C_Y B_Y$$

به کمک پرگار معلوم می‌شود که $B_1B_2 = \frac{1}{9}AB_1$ ، یعنی دفعه

دوم به اندازه $\frac{1}{9}$ زمان دفعه اول ، کمتر در راه بوده است .

(۲) هردو دفعه ، يك سوم راه با سرعت اوليه و مثلاً در زمان t طی شده است .

هر دو دفعه، نیم دوم راه، با سرعت دو برابر طی شده است، بنابراین

این درمورد آن $t = \frac{3}{4}$ وقت صرف شده است .

دفعه اول، برای بقیه يك ششم راه، به اندازه $\frac{t}{4}$ وقت صرف شده است.

دفعهٔ دوم، برای همین يك ششم راه، $\frac{t}{4}$ وقت صرف شده است.

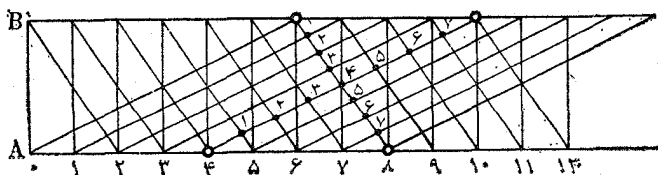
در مجموع ، وقتی که صرف شده است ، چنین است :

$$t + \frac{3}{4}t + \frac{1}{2}t = \frac{9}{4}t \quad \text{دفعه اول :}$$

$$t + \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}t = \frac{8}{4}t \quad \text{دفعه دوم :}$$

بنابراین ، دفعه دوم به اندازه $\frac{1}{9}$ زمان دفعه اول ، وقت کمتر صرف شده است .

۲۳۷. اگر جریان آب وجود نداشت و قایقها در آب ساکن حرکت می کردند ، قایقی هم که از B به سمت A حرکت می کرد به هفت قایقی که از A حرکت کرده بودند ، برخورد می کرد . در حالتی هم که جریان آب وجود دارد ، تعداد ملاقاتها تغییر نمی کند ، زیرا هیچ دلیلی



شکل ۱۳۸

برای تغییر تعداد ملاقاتهای قایقها وجود ندارد. این تمام حل مسأله است. ولی آیا هیچ چیز تغییر نمی کند ؟ چون به مناسبت وجود جریان آب ، سرعت قایقها (نسبت به ساحل) تغییر می کند (به نسبت $(2-1) : (2+1)$ ، یعنی $1 : 3$) ، زمانی که برای طی مسیر لازم است ، تغییر می کند (و به نسبت $3 : 1$ است) ؛ به این مناسبت ، برای قایقی که به طرف پایین و در جهت جریان آب می رود ، فاصله زمانی ملاقات دو قایق متوالی که از جهت عکس می آیند ، ثلث همین نوع فاصله زمانی برای قایقی است که در خلاف جریان آب حرکت می کند ، (شکل ۱۳۸ را ببینید).

۲۳۸. (۱) سرعت اختصاصی قایق را x کیلومتر در ساعت می گیریم. در این

صورت ، قایق در جهت جریان آب $(x+4) : 13\frac{1}{3}$ ساعت و در

خلاف جریان آب $(x - 4)$: $\frac{1}{3}$ ساعت ، وقت صرف کرده است.

كلك تا لحظه ملاقات به اندازه $\frac{1}{3} - \frac{1}{13}$ ، یعنی ۴ کیلومتر راه

رفته است و برای این فاصله ۴ : ۴ ، یعنی ۱ ساعت وقت صرف کرده

است . به این ترتیب به معادله زیر می‌رسیم :

$$\frac{\frac{1}{13}}{x + 4} + \frac{\frac{1}{3}}{x - 4} = 1$$

که از آنجا ، مقدار x بدست می‌آید: سرعت قایق $\frac{2}{3}$ کیلومتر در

ساعت است .

(۲) قایق در جهت جریان آب $\frac{1}{3}$ کیلومتر ، ولی در خلاف جریان

آب $\frac{1}{3}$ کیلومتر ، یعنی ۴ کیلومتر رفته است . بنابراین در این

مدت ، كلك فقط ۴ کیلومتر رفته است و چون سرعت جریان آب ۴

کیلومتر در ساعت است ، از لحظه حرکت از نقطه A تا لحظه ملاقات ،

يك ساعت طول کشیده است . اگر دستگاه «قایق - كلك» را در نظر

بگیریم (بدون توجه به ساحل) ، معلوم می‌شود که قایق از نظر

زمانی ، همانقدر از كلك دور شده است ، که در موقع برگشتن ، برای

ملاقات با كلك ، وقت لازم داشته است ، یعنی ۲ : ۱ یا ۵/۰ ساعت .

قایق در نیم ساعت $\frac{1}{3}$ کیلومتر (نسبت به ساحل) جلورفته است ،

بنابراین سرعت آن ۵/۰ : $\frac{1}{3}$ یا $\frac{2}{3}$ کیلومتر در ساعت است ،

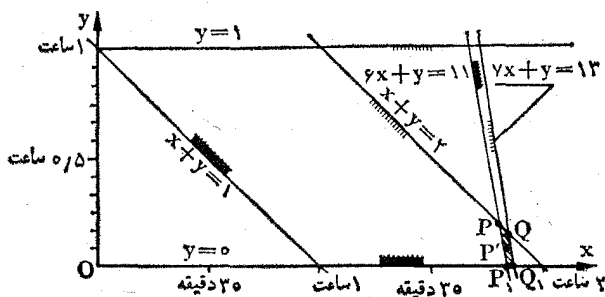
که اگر سرعت جریان آب را از آن کم کنیم ، سرعت اختصاصی قایق $\frac{2}{3}$

کیلومتر در ساعت بدست می‌آید .

که اگر از نامساویهایی که از بقیه نتیجه می شود ، صرف نظر کنیم ، به این دستگاه می رسم :

$$\begin{cases} 0 \leq y < 1 \\ 1 \leq y + x < 2 \\ 11 \leq y + 6x \\ y + 7x < 13 \end{cases}$$

دستگاه را به کمک ترسیم حل می کنیم (شکل ۱۳۰) .



شکل ۱۳۰

در صفحه محورهای مختصات ، این شش خط را رسم می کنیم :

$$y = 0 , *$$

$$y = 1 ,$$

$$x + y = 1 , *$$

$$x + y = 2 ,$$

$$6x + y = 11 , *$$

$$7x + y = 13$$

هریک از این خطها ، با توجه به علامت نامساوی ($<$ یا $>$) ، نیم صفحه ای را برای ما مشخص می کند ؛ هر یک از این نیم صفحه ها را روی شکل به وسیله هاشور و یا نوار کوتاه سیاه مشخص کرده ایم ، در حالتی که با علامت $\leq$ سروکار داریم ، خود نقطه های خط راست هم در نامعادله صدق می کند (معادله این خطها با علامت ستاره و

نیم صفحه‌های مربوط به آنها با نوار سیاه مشخص شده است؛ و در حالتی که با علامت $<$ سروکار داریم، نقطه‌های واقع بر خط در نامعادله صدق نمی‌کند.

x و y مورد نظر عبارت است از مختصات نقطه‌هایی که در هرشش نیم صفحه قرار داشته باشد. روی شکل ۱۳۰ دیده می‌شود که این نقطه‌ها، چهارضلعی PQP_1Q_1 را تشکیل می‌دهند، که البته نقطه‌های واقع بر دو ضلع PQ و QQ_1 جزو آنها نیست.

شرط اضافی مسأله (x و y باید مضرب ۵ باشند)، تنها در مورد دو نقطه صدق می‌کنند:

$$P_1(1^\circ 50', 0^\circ 0')$$

$$P'(1^\circ 50', 0^\circ 5')$$

نقطه $Q(1^\circ 50', 10')$ با شرط مسأله می‌سازد، ولی در نامعادله $13 < 7x + y$ صدق نمی‌کند.

بنابراین مقدار x ، یعنی فاصله زمانی بین هر دو ستانس، مساوی یک ساعت و ۵۰ دقیقه و شروع ستانس اول، ساعت ۱۲ یا ساعت ۱۲ و ۵ دقیقه است.

(۲) ستانس اول قبل از ساعت ۱۲ شروع نشده است، ستانس هفتم هم بعد از ساعت ۱ شب تمام نشده است؛ بنابراین، این هفت ستانس بیش از $12 - (24 + 1)$ ، یعنی ۱۳ ساعت وقت را نگرفته است. در نتیجه زمانی که برای یک ستانس لازم است، از ۱ ساعت و ۵۱ دقیقه تجاوز نمی‌کند (یک هفتم ۱۳ ساعت، یا ۷۸۰ دقیقه، مساوی ۱ ساعت و ۵۱ دقیقه است).

ستانس دوم قبل از ساعت ۱۴ شروع می‌شود و ستانس ششم قبل از ساعت ۲۲ و ۵۵ دقیقه تمام نمی‌شود؛ بنابراین، برای این پنج ستانس کمتر از ۸ ساعت و ۵۵ دقیقه ($14^\circ - 22^\circ 55'$)، نمی‌توان به حساب آورد. در نتیجه زمان لازم برای یک ستانس نمی‌تواند از ۱ ساعت و ۴۷ دقیقه کمتر باشد (یک پنجم ۸ ساعت و ۵۵ دقیقه، یا ۵۳۵ دقیقه، مساوی ۱ ساعت و ۴۷ دقیقه می‌شود). به این ترتیب:

(دقیقه) ۵۱ (ساعت) ۱ $\leq x \leq$ (دقیقه) ۴۷ (ساعت) ۱

از آنجا که فاصله زمانی لازم برای يك سئانس باید مضربی از ۵ دقیقه باشد، x مساوی يك ساعت و ۵۰ دقیقه می شود. سئانس اول تا ساعت ۱۴ تمام می شود و بنابراین شروع آن ساعت ۱۲ و یا ۱۲ و ۵۰ دقیقه است.

۲۴۰. دانش آموز سوم توصیه کرد که دومی به جای دوشماره، فقط یکی از شمارهها را بگیرد. چون معلوم نیست کداميك از شمارهها متعلق به اولی است، شماره ای را که دومی می گیرد ممکن است همان شماره مورد نیاز خودش باشد و ممکن است شماره مورد نیاز او نباشد. در حالت اول، لزومی ندارد که دومی برای دیدن اولی، پیش او برگردد. در حالت دوم باید به سالن رستوران برگردد و شماره خودش را بگیرد.

توصیه دانش آموز ریاضی، دانش آموز دوم را با پنجاه درصد احتمال، از برگشتن معاف می کند.

۲۴۱. a) اگر تعداد گردوهای هریک از سه کیسه باهم مساوی باشد (مثلاً در هر کیسه m گردو)، تعداد کل گردوها در سه کیسه مساوی $3m$ می شود، یعنی باید داشته باشیم: $n = 3m$ (که در آن m عددی صحیح و مثبت است). ولی n عددی دلخواه است و بنابراین، سه حالت می تواند باشد:

$$n = 3m$$

$$n = 3m + 1$$

$$n = 3m + 2$$

به این ترتیب از سه حالتی که برای n وجود دارد، تنها یکی از آنها می تواند برای تساوی تعداد گردوها در هر سه کیسه، قابل قبول باشد (که در این صورت در هر کیسه ۳: n گردو می تواند وجود داشته باشد)، برای دو حالت دیگر، این وضع ممکن نیست.

به این مناسبت، حالتی را در نظر می گیریم که تعداد کل گردوها در سه کیسه مساوی $n = 3m$ باشد.

این $3m$ گردو می تواند بین سه کیسه به طریقه های مختلف تقسیم شود: مثلاً در کیسه اول هیچ، در دومی یک گردو و در سومی بقیه گردوها. به چند طریق مختلف می توان تعداد $3m$ گردو را بین این سه کیسه تقسیم کرد؟

ابتدا حالت ساده تری را در نظر می گیریم: فرض می کنیم دو کیسه داشته باشیم و تعداد کل گردوها مساوی k باشد. در این صورت در کیسه اول ممکن است ۰ گردو یا ۱ گردو یا ۲ گردو ... یا k گردو وجود داشته باشد. به این ترتیب، در حالتی که دو کیسه و روی هم k گردو داشته باشیم، $(k+1)$ حالت مختلف وجود دارد. به مسأله خودمان برمی گردیم که سه کیسه و روی هم n گردو داریم: اگر در کیسه اول p گردو ($p \leq n$) وجود داشته باشد، بقیه $(n-p)$ گردو را (بنابر مسأله ای که برای دو کیسه، هم اکنون حل کردیم)، می توان به $(n-p+1)$ طریق در دو کیسه دیگر (دومی و سومی) قرار داد.

حالا می توان تعداد کل حالت های مختلف و ممکن را با توجه به مقادیر مختلف p ($p = 0, 1, 2, \dots, n$)، بدست آورد. باید مجموع زیر را محاسبه کنیم:

$$\sum_{p=0}^n (n-p+1) = \sum_{p=0}^n [(n+1)-p] = \\ = (n+1) + n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

بنابراین تعداد کل حالت های ممکن، برای تقسیم n گردو در سه کیسه، برابر است با:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

از این $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ حالت، تنها یکی، با شرط مسأله می سازد؛

بنابراین احتمال مورد نظر (برای $n=3m$)، برابر است با

$\frac{2}{(n+1)(n+2)}$ ، و چون احتمال اینکه $n = 3m$ باشد، برابر است

با $\frac{1}{3}$ ، احتمال اینکه تعداد گردوها، در سه کیسه، یکی باشد،

برابر است با $\frac{2}{3(n+1)(n+2)}$.

(b) این احتمال صفر است، زیرا تعداد حالت‌های ممکنه تقسیم آرد در سه کیسه، بی‌نهایت است.

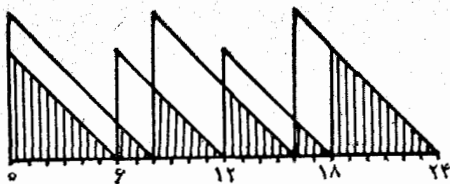
۲۴۲. هر دو جواب نادرست است. علاوه بر آن، آنچه که مسئله داده است،

برای بدست آوردن جواب دقیق، کافی نیست. حالت ساده‌تری را در نظر بگیریم. فرض کنید فاصله زمانی چه برای حرکت اتوبوس و چه برای حرکت ترولیبوس، مساوی ۸ دقیقه باشد. اگر برنامه تنظیمی این طور باشد که اتوبوس و ترولیبوس از یک ایستگاه، باهم حرکت کنند، وجود دو نوع وسیله، فاصله زمانی انتظار مسافرها را کم نمی‌کند؛ در این حالت بطور متوسط باید $4 = 2 : 8$ دقیقه انتظار کشید.

ولی اگر برنامه به این ترتیب تنظیم شده باشد که ترولیبوس ۴ دقیقه بعد از اتوبوس حرکت کند، زمان متوسط انتظار، برابر $2 = 4 : 4$ دقیقه می‌شود.

به این ترتیب، اگر هم اتوبوس و هم ترولیبوس هر کدام هر ۸ دقیقه یک بار، حرکت کنند، زمان انتظار بین ۲ دقیقه تا ۴ دقیقه (بسته به برنامه تنظیمی) می‌تواند باشد.

به مسئله خودمان برمی‌گردیم (فاصله زمانی ۶ دقیقه و ۸ دقیقه). وضعی را که پیش می‌آید به کمک شکل نشان می‌دهیم. مسافر در هر لحظه‌ای ممکن است به ایستگاه برسد. مدت انتظار او وقتی ۵ دقیقه است که درست در لحظه حرکت اتوبوس (یا ترولیبوس) به ایستگاه برسد. مدت انتظار وقتی مساوی t است که مسافر درست در یک لحظه بعد از حرکت اتوبوس (یا ترولیبوس) برسد (t دقیقه را فاصله دو حرکت گرفته‌ایم).



شکل a-۱۳۱

در شکل ۱۳۱ - a ،
وضع انتظار را برای
حالتی نشان داده ایم ،
که برنامه حرکت
اتوبوس و ترولیبوس
چنان باشد که در

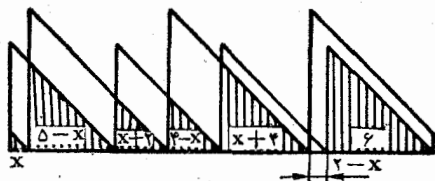
لحظه ای با هم از یک ایستگاه حرکت کنند. مساحت های مثلث های هاشور
خورده را محاسبه می کنیم :

$$\frac{1}{2}(6^2 + 2^2 + 4^2 + 4^2 + 2^2 + 6^2) = 56$$

متوسط زمان انتظار برابر خواهد بود با :

$$56 : 24 = 7 : 3 = 2 \frac{1}{3} \text{ (دقیقه)}$$

وقتی که برنامه حرکت این دو وسیله را طور دیگری تنظیم کنیم ،
متوسط انتظار چقدر خواهد بود ؟ فرض کنید ترولیبوس ، x دقیقه
بعد از اتوبوس حرکت کند (شکل ۱۳۱ - b)؛ برای تعیین زمان متوسط

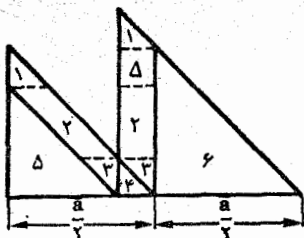


شکل b-۱۳۱

انتظار ، باید مساحت
مثلث های هاشورخورده
را حساب کنیم و بینیم
به ازای چه مقداری از
 x ، این مساحت به
حداقل خود می رسد

(متذکر می شویم که $0 \leq x \leq 2$ ، ضمناً برای $x = 2$ همان شکلی
بدست می آید که برای $x = 0$).

ابتدا به حل این مسأله می پردازیم: پاره خط a داده شده است؛ روی
این پاره خط ، دو مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین طوری بسازید که
مساحت آنها حداقل باشد. ثابت می کنیم که برای این منظور باید
دو مثلث مورد نظر مساوی باشند. روی پاره خط مفروض a ، دو



شکل ۱۳۱-۵

زوج مثلث قائم الزاویه
متساوی الساقین می سازیم، به
نحوی که یک زوج آنها از مثلثهای
متساوی تشکیل شده باشد
(شکل ۱۳۱-۵). مطابق شکل،
خطهای راستی موازی با قاعده‌ها
رسم می‌کنیم. مقایسه قسمت-
هایی که بدست می‌آید، معلوم

می‌کند که مساحت دو مثلث نامساوی، از مساحت دو مثلث مساوی،
به اندازه قطعه‌ای که با Δ نشان داده‌ایم، بیشتر است، و این همان
چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

از اینجا نتیجه می‌شود که حداقل مساحت برای مثلثهای با قاعده‌های
($x+2$) و ($4-x$)، وقتی است که داشته باشیم:

$$x+2=4-x \text{ یا } x=1$$

به همین ترتیب دو مثلث با قاعده‌های ($6-x$) و ($x+4$)، وقتی
در مجموع حداقل مساحت را دارند که داشته باشیم:

$$6-x=x+4 \text{ یا } x=1$$

بالاخره برای مثلثهای با قاعده‌های x و ($2-x$) باید داشته باشیم:

$$2-x=x \text{ یا } x=1$$

به این ترتیب به ازای $x=1$ ، مساحت هر یک از سه زوج مثلث،
به حداقل خود می‌رسد، یعنی وقتی x را مساوی ۱ دقیقه بگیریم،
مجموع زمان انتظار به حداقل می‌رسد و برابر است با:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[x^2 + (6-x)^2 + (x+2)^2 + (4-x)^2 + (x+4)^2 + \right. \\ & \left. + (2-x)^2 + 6^2 \right] = \frac{1}{2} \left[1^2 + 5^2 + 3^2 + 3^2 + 5^2 + \right. \\ & \left. + 1^2 + 6^2 \right] = 53 \end{aligned}$$

و زمان متوسط انتظار مساوی $\frac{53}{24}$ یا $2\frac{5}{24}$ دقیقه می شود .

می بینیم که در بهترین وضع برنامه ، متوسط زمان انتظار مساوی

$2\frac{5}{24}$ دقیقه می شود که اگر با زمان متوسط انتظار در حالت اول

$2\frac{1}{3}$ دقیقه) مقایسه کنیم ، $\frac{1}{8}$ دقیقه کمتر است و صرفه جویی نسبی

وقت چنین است :

$$\frac{1}{8} : 2\frac{1}{3} = \frac{3}{56} \approx 5\%$$